場の理論とトポロジー

場の理論とトポロジー

河野俊丈

岩波書店

まえがき

物理学と幾何学は互いに強いインパクトを与えながら発展してきた．1980年代以降の両者のかかわりにおいて，とくに顕著な点は，場の量子論の幾何学への応用である．この本では，1980年代の，Jones多項式の発見，共形場理論，WittenのChern–Simonsゲージ理論による3次元多様体の不変量の構成などを契機として発展した，2次元の場の量子論と3次元トポロジーの関係を扱う．場の量子論における本質的な困難は，自由度が無限大であることによっている．場の量子論で培われた無限を扱うさまざまな手法は，幾何学にも深く浸透してきた．ここでは，多様体上の場の分配関数として，多様体の位相不変量を構成することに焦点をあてて，トポロジーへの応用について述べる．

場の理論では，物理学者の間で等価であると考えられているいくつかの記述がある．例えばFeynman経路積分による量子化と正準量子化などである．幾何学で扱う対象を，場の理論の概念に翻訳することにより，新たな関係が見いだされ，思わぬ展開をうむことがある．この本の主要なテーマである，共形場理論とChern–Simons理論の関係も，Chern–Simons汎関数から出発して，2通りの方法で，状態空間を書き下すことにより見いだされた．このような手法は，幾何学に新たなパースペクティブを提供し，さまざまな示唆をもたらす．ただ，物理の意味の等価性は，幾何学においてかならずしも証明されている事実ではないことを念頭においておく必要がある．証明のためには，しばしば，個別に手法を開発することが必要であり，これは，幾何学の側の重要な問題を提供する．

以下，この本の内容を概観する．古典力学からはじめて，幾何学的量子化など背景となる基礎的な概念については「理論の概要と展望」に述べられている．第1章では，ループ群の幾何学を基礎にして，共形場理論を扱う．ま

ず，ループ群とその上の複素直線束，アフィンLie環，Virasoro代数などについて解説した後，共形ブロックの空間，KZ方程式など共形場理論において，重要な対象を定式化していく．KZ方程式は，通常は場の作用素に関する作用素積展開から導かれるが，ここでは，幾何学的視点を強調して記述した．第2章では，共形場理論のホロノミーによって得られる組みひも群の表現について解説し，さらに，これを用いて，リンクのJones多項式，3次元多様体のWitten不変量を構成する．また，共形ブロックの空間への曲面の写像類群の作用を記述し，Atiyahの意味の位相的場の理論について述べる．2.5節では，Chern–Simons理論と，曲面の平坦接続のモジュライ空間の幾何学的量子化との関係についてふれる．第3章では，Chern–Simons摂動理論とVassiliev不変量を扱う．まず，結び目のVassiliev不変量について述べ，Chenの反復積分から，KontsevichによるVassiliev不変量の積分表示にいたる流れについて説明する．最後に，Chern–Simons摂動理論から導かれる3次元多様体の位相不変量を記述する．

この本で扱っている内容は場の理論とトポロジーのかかわりという点からは，ほんの一部にすぎないが，ここで，扱ったテーマを通して，理論の内包する豊饒さを感じ取っていただければ，筆者にとって，望外の喜びである．

1998年7月

河 野 俊 丈

追記

本書は岩波講座『現代数学の展開』の1分冊として刊行された「場の理論とトポロジー」を単行本化したものである．今回の単行本化に際して，一部訂正を行なった．

2008年3月

理論の概要と展望

この本の目的は，場の理論におけるさまざまな手法に触発されて発展したトポロジーの研究における新しい展開を紹介することであるが，まず，古典力学からはじめて，理論の背景と基礎的な概念を述べていこう．

古典力学における Lagrange 形式と Hamilton 形式

N を n 次元微分多様体とする．N の接バンドル TN 上に，時間パラメータ t に依存する **Lagrangian** とよばれる関数 $\mathcal{L}(t,x,\xi)$ が与えられているとする．ここで，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ は，N の局所座標で，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ は，接空間の座標である．$\gamma:[a,b]\to N$ を，N のなめらかな曲線として，

$$S=\int_a^b \mathcal{L}(t,\gamma(t),\gamma'(t))dt$$

を，作用積分とよぶ．曲線を，端点 $\gamma(a),\gamma(b)$ を固定して動かすとき，作用積分の値の臨界点を与える曲線は，**Euler–Lagrange 方程式**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_j}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n$$

を満たすことがわかる．とくに，n 次元 Euclid 空間における質量 m の点粒子の運動については，ポテンシャルを V として，$\mathcal{L}=\dfrac{1}{2}m\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2-V$ とおけば，Euler–Lagrange 方程式は，Newton の運動方程式にほかならない．このように，Lagrangian を出発点として，作用積分に関する変分問題の解として，運動方程式を記述する古典力学の定式化を，Lagrange 形式とよぶ．

次に，Hamilton 形式について説明しよう．一般に，M を $2n$ 次元多様体とする．M 上の 2 次微分形式 ω で，$d\omega=0$ を満たし，かつ，非退化であるものを**シンプレクティック形式**(symplectic form)とよぶ．ここで，2 次微分形

式が非退化であるとは，M 上いたるところで，$\omega^n \neq 0$ となることである．シンプレクティック形式をもつ多様体を**シンプレクティック多様体**(symplectic manifold)とよぶ．

シンプレクティック形式があると，次のようにベクトル場と 1 次微分形式との間に一対一の対応をつけることができる．X を M 上のベクトル場とする．1 次微分形式 $\varphi = i(X)\omega$ を

$$\varphi(Y) = \omega(X, Y)$$

で定める．ここで，Y は M 上のベクトル場である．シンプレクティック形式が非退化であることから，上の対応

$$X \longmapsto i(X)\omega$$

は，ベクトル場と 1 次微分形式との間に一対一の対応を与える．M 上のなめらかな関数 f に対して，ベクトル場 X_f を

$$i(X_f)\omega = df$$

で定め，これを f に対応する **Hamilton ベクトル場**(Hamiltonian vector field)とよぶ．

M 上の関数 f, g に対して，$\{f, g\}$ を

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$$

で定め，これを f と g の **Poisson 括弧**(Poisson bracket)とよぶ．Poisson 括弧は，f, g について，線形で交代的である．定義から，

$$\omega(X_f, X_g) = i(X_f)\omega(X_g) = df(X_g) = X_g f$$

であり，これは $-X_f g$ とも表される．また，Hamilton ベクトル場の Lie ブラケットについて $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ が成立する．

M 上に **Hamiltonian** とよばれる関数 H が与えられているとして，H に対する Hamilton ベクトル場 X_H を考える．M 上の関数 f の値が Hamilton ベクトル場の積分曲線にそって，どのように変化するかを記述してみよう．積分曲線のパラメータを t として，

$$\frac{df}{dt} = X_H f$$

なので，

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

が得られる．とくに，Hamiltonian H は，上の積分曲線上一定の値をとる．

複素直線束と量子化

E を微分多様体 M 上の C^∞ 級複素ベクトル束とする．M の余接バンドル T^*M の複素化を $T^*M_{\mathbb{C}}$ で表す．$E, T^*M_{\mathbb{C}} \otimes E$ の C^∞ 級セクション全体の空間をそれぞれ，$\Gamma(E)$，$\Gamma(T^*M_{\mathbb{C}} \otimes E)$ で表す．E 上の**接続**(connection)とは，$\mathbb{C}$ 線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M_{\mathbb{C}} \otimes E)$$

であって，M 上の C^∞ 級関数 f と，E の C^∞ 級セクション s に対して Leibniz 則

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

を満たすものである．ベクトル場 $X \in \Gamma(TM_{\mathbb{C}})$ について，

$$(\nabla_X s)(x) = (\nabla s)(X_x)$$

で定まる $\nabla_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を，X による**共変微分**(covariant derivative)とよぶ．ベクトル束と接続に関する一般論については文献[6]を参照されたい．

以下，ランク 1 の複素ベクトル束，つまり，**複素直線束**(complex line bundle)に限って説明する．M を微分多様体，L をその上の C^∞ 級複素直線束とする．L には Hermite 計量が入っているとする．M の開被覆 $M = \bigcup_j U_j$ が存在して，開集合 U_j 上では，L は $U_j \times \mathbb{C}$ と自明化されている．∇ を L の接続とする．開集合 U_j 上で

$$\nabla = d - 2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_j$$

と表しておく．ここで，α_j は，U_j 上定義された局所的な 1 次微分形式であるが，$d\alpha_j$ は，M 上の大域的な 2 次微分形式を定め，これを，$c_1(\nabla)$ とかいて，∇ の**第一 Chern 形式**(first Chern form)という．de Rham コホモロジー類 $[c_1(\nabla)] \in H^2(M, \mathbb{R})$ は，接続 ∇ のとり方にはよらずに定まり，これが，L の第一 Chern 類である．**第一 Chern 類**(first Chern class)は，自然な写

像 $i: H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R})$ の像に含まれている．逆に，M 上の 2 次微分形式 ω で，$d\omega=0$ を満たし，かつ，$H^2(M,\mathbb{Z})$ の要素を定めるものをとると，L の Hermite 接続 ∇ で，$c_1(\nabla)=\omega$ となるものを構成することができる．第 1 章で，M が単連結のとき，実際に複素直線束 L の構成を行う．

古典力学では，系の時間発展を表す運動方程式は，Hamiltonian H と，Poisson 括弧を用いて，$\dfrac{df}{dt}=\{H,f\}$ で表された．Dirac による，量子力学の枠組みは，関数 f に対して線形作用素 $\tilde{f}$ を対応させ，この対応は線形で，かつ，$\{f_1,f_2\}=f_3$ のとき，

$$\tilde{f}_1\tilde{f}_2-\tilde{f}_2\tilde{f}_1=-\sqrt{-1}\,\hbar\tilde{f}_3$$

を満たすことを要請するというものである．ここで $\sqrt{-1}\,\tilde{f}/\hbar=\widehat{f}$ とおく．作用素 $\widehat{f}_1,\widehat{f}_2$ は非可換であり，

$$[\widehat{f}_1,\widehat{f}_2]=\widehat{f}_1\widehat{f}_2-\widehat{f}_2\widehat{f}_1$$

によって，作用素の Lie ブラケットを定義する．量子力学における基礎方程式は，

$$\frac{d\widehat{f}}{dt}=[\widehat{H},\widehat{f}]$$

で与えられ，これは，**Heisenberg 方程式**とよばれる．

古典力学系をシンプレクティック多様体 (M,ω) で表し，M 上のなめらかな関数全体 $C^\infty(M)$ を，Poisson 積に関して Lie 環とみなす．この Lie 環を，ある Hilbert 空間上に表現すること，つまり，それぞれの関数 f に対して，Hilbert 空間の線形作用素を Lie 環の構造を保つように対応させるというのが，**量子化**(quantization)の基本的な発想である．M 上の複素直線束を用いて，このようなプログラムを実行することを考えよう．上に述べたように，$2n$ 次元のシンプレクティック多様体 (M,ω) について，ω が，整数係数のコホモロジー $H^2(M,\mathbb{Z})$ の要素を定めるという仮定のもとで，M 上の複素直線束 L とその上の接続 ∇ で，対応する第一 Chern 形式が ω になるものを構成することができる．

複素直線束 L のなめらかなセクション全体を $\Gamma(M,L)$ とおき，$s_1,s_2\in\Gamma(M,L)$ に対して

$$\langle s_1, s_2\rangle = \int_M (s_1(x), s_2(x))\frac{\omega^n}{n!}$$

とおくことにより，L^2 内積を入れる．ここで，上の式の右辺の括弧は，複素直線束 L の Hermite 計量を表す．この内積について，L の L^2 セクション全体の空間を $\mathcal{H}$ とおくと，$\mathcal{H}$ は Hilbert 空間の構造をもつ．∇_{X_f} で，Hamilton ベクトル場 X_f に関する共変微分を表す．M 上のなめらかな写像 f に対して，$\mathcal{H}$ の線形作用素 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}s = \nabla_{X_f}s - 2\pi\sqrt{-1}\,fs, \quad s\in\mathcal{H}$$

で定める．ここで，

$$\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X = \nabla_{[X,Y]} - 2\pi\sqrt{-1}\,\omega(X,Y)$$

と，$\omega(X_f, X_g) = -\{f,g\}$ を用いると，上の $\widehat{f}$ の構成により，$[\widehat{f},\widehat{g}] = \widehat{\{f,g\}}$ が成立することがわかる．つまり，Poisson 括弧に関する Lie 環 $C^\infty(M)$ の $\mathcal{H}$ 上の表現が得られることが確かめられる．

N を微分多様体とし，余接バンドル T^*N を M とおく．M は，N の局所座標 $q_1,\cdots,q_n$ とファイバー方向の座標 $p_1,\cdots,p_n$ を用いて，

$$\omega = \sum_{j=1}^n dp_j\wedge dq_j$$

と表されるシンプレクティック形式をもつシンプレクティック多様体となる．1 次微分形式 θ を $\theta = \sum_{j=1}^n p_jdq_j$ で定め，M 上の自明な複素直線束 $L = M\times\mathbb{C}$ に接続 $\nabla = d - \sqrt{-1}\,\hbar^{-1}\theta$ を入れる．このとき，L のセクション，つまり，M 上の複素数値関数 s に対して，$\tilde{f}s = \sqrt{-1}\,\hbar\nabla_{X_f}s + fs$ とおき，座標関数 q_j, p_j に付随して定まる $\tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ の作用を書き下すと

$$\tilde{p}_j = -\sqrt{-1}\,\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \tilde{q}_j = \sqrt{-1}\,\hbar\frac{\partial}{\partial p_j} + q_j$$

が得られる．したがって，とくに，$q_1,\cdots,q_n$ のみに依存する関数についての作用をみると，いわゆる，正準量子化の手続きが得られる．正準量子化は，p_j を微分作用素 $-\sqrt{-1}\,\hbar\dfrac{\partial}{\partial q_j}$ でおきかえる操作であった．このように，Hilbert 空間として，L の L^2 セクション全体の空間をとると，量子化を与え

る空間としては大きすぎる．次に説明する**偏極**(polarization)は，適切な空間を抽出するための方法を与える．

(M,ω) を $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とするとき，M の接バンドル TM の複素化 $TM_{\mathbb{C}}$ の可積分な Lagrangian 部分束 $V_P \subset TM_{\mathbb{C}}$ を偏極とよぶ．ここで，部分ベクトル束 V_P が**可積分**(integrable)であるとは，V_P のセクション X,Y に対して，$[X,Y]$ が，再び V_P のセクションになることである．また，V_P が **Lagrangian** とは，M の任意の点 x について，V_P の x 上のファイバーの次元が n で，その上で ω が恒等的に 0 になることである．このような偏極が与えられたとき，

$$\mathcal{H}_0 = \{s \in \mathcal{H} \mid \nabla_X s = 0,\ X \in \Gamma(M, V_P)\}$$

とおいて，Hilbert 空間として，$\mathcal{H}$ のかわりに，$\mathcal{H}_0$ を採用することにする．上で述べた，正準量子化の手続きにおいて，$q_1, \cdots, q_n$ のみに依存する関数をとりだしたが，これは，射影 $d\pi : TM_{\mathbb{C}} \to TN_{\mathbb{C}}$ の核による偏極の帰結である．

(M,ω) を Kähler 多様体とする．$V_P = TM^{0,1}$ を $(0,1)$ ベクトル全体からなる $TM_{\mathbb{C}}$ の部分束とすると，V_P は，上の意味の偏極を与える．これは，Kähler 偏極とよばれる．Kähler 偏極に関する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ は，L の正則なセクション全体の空間 $H^0(M,L)$ にほかならない．重要な応用例として，**Borel–Weil 理論**をあげておこう．G をコンパクト Lie 群，T をその極大トーラスとする．G/T は旗多様体(flag manifold)とよばれ，Kähler 多様体の構造をもつ．Borel–Weil 理論は，G の既約表現を，M 上の正則な複素直線束 L の正則なセクション全体の空間 $H^0(M,L)$ として実現するというものである．これは，第 1 章で説明する共形場理論のプロトタイプとみなすことができる．

シグマ模型

シグマ模型とよばれる場の理論の基本的な枠組みを解説しよう．まず，Riemann 多様体 M を固定する．X をコンパクトで向きのついた $d+1$ 次元の Riemann 多様体として，X から M へのなめらかな写像 ϕ を，ここでは，**場**(field)とよぶことにする．シグマ模型における場全体の集合は，X から

M へのなめらかな写像全体の空間

$$C_X = \mathrm{Map}(X, M)$$

である．多様体 X の方が，時空間のモデルであり，$d+1$ 次元という表現は，空間 d 次元，時間 1 次元を意味している．一般的には，場はいろいろなバリエーションがありうる．例えばゲージ理論では，場は，X 上のファイバー束の接続ととらえられる．場に対して，作用を考えることにより，理論が展開される．ここで，作用とは，C_X 上の関数 $S_X : C_X \to \mathbb{R}$ であり，シグマ模型においては，

$$S_X(\phi) = \int_X |d\phi|^2 dv$$

で与えられる．ここで，dv は，X の Riemann 計量に関する体積要素を表す $d+1$ 次微分形式である．作用 S_X を極小にするような ϕ は，調和写像とよばれる．

次に述べる S_X のいくつかの性質は，いずれも容易に示されるが，これから展開していく理論において重要な役割を果たす．

（1） $f: X' \to X$ をイソメトリーとすると，f は，写像 $f^* : C_X \to C_{X'}$ を誘導し，$S_{X'}(f^*\phi) = S_X(\phi)$ が満たされる．

（2） X の向きを反対にしたものを $-X$ とかくと，$S_{-X}(\phi) = -S_X(\phi)$, $\phi \in C_X$ が成り立つ．

（3） $X = X_1 \sqcup X_2$ を共通部分をもたない和集合とするとき，$\phi \in C_X$ に対して，X_1, X_2 への制限をそれぞれ，ϕ_1, ϕ_2 で表すと，

$$S_X(\phi) = S_{X_1}(\phi_1) + S_{X_2}(\phi_2)$$

が成り立つ．

（4） X の d 次元部分多様体 Y について，X を $X = X_+ \cup X_-$, $\partial X_+ = Y$, $\partial X_- = -Y$ と分解するとき，Y 上で一致する $\phi_+ \in C_{X_+}$, $\phi_- \in C_{X_-}$ に対して，$\phi \in C_X$ が存在して，

$$S_X(\phi) = S_{X_+}(\phi_+) + S_{X_-}(\phi_-)$$

が成り立つ．

Feynman 経路積分による量子化

古典力学では，2 点の間を運動する粒子の軌道は，Lagrangian についての作用積分 S を極小にすることから決定された．これに対して，量子力学における描像では，2 点の間のすべての道 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ に対して，作用による確率関数 $e^{\sqrt{-1}S(\gamma)/\hbar}$ の寄与を考えることになり，これは，形式的には，道の空間における測度 μ を用いて，

$$\int e^{\sqrt{-1}S(\gamma)/\hbar}d\mu(\gamma)$$

という形に表される．この種の積分は，**Feynman 経路積分**(Feynman path integral)とよばれる．積分の数学的に厳密な定式化は，Gauss 積分のくり返しに帰着できるような場合をのぞいて，非常に難しい．Planck 定数 $\hbar$ が，0 に近いとみなせる状況では，経路積分に本質的に寄与するのは，S の臨界点つまり，古典力学における粒子の軌道になり，それ以外は，振動積分が打ち消し合うと考えられる．このようにして，量子論から古典論が再現される．Feynman 経路積分については，文献[5]も参照されたい．

X をコンパクトで，境界のない，向きのついた $d+1$ 次元多様体として，シグマ模型の場合に，Feynman 経路積分による量子化を実行しようとすると，C_X 上に測度 μ_X を導入して，分配関数

$$Z(X)=\int_{C_X}e^{\sqrt{-1}S(\phi)/\hbar}d\mu_X(\phi)$$

を計算することが必要になる．上にも述べたように，残念ながら，厳密に測度 μ_X を定義することは，現代の数学では，多くの場合になされていない．ここでは，分配関数 $Z(X)$ が満たすと期待される性質を書き下し，別の観点から $Z(X)$ を構成することを目標にする．鍵になる考え方は，境界のある多様体について理論を定式化することにより，上の(4)で述べたように多様体を 2 つの部分に分解して，分配関数 $Z(X)$ を計算することである．もう少し，形式的な議論を続けよう．X の境界が空集合ではないとして，$\partial X=Y$ とおく．$\alpha\in C_Y$ に対して，Y に制限すると α と一致するような $\phi\in C_X$ 全体の集合を，$C_X(\alpha)$ とおく．やはり，形式的ではあるが，

$$Z(X)_\alpha = \int_{C_X(\alpha)} e^{\sqrt{-1}S(\phi)/\hbar} d\mu_X(\phi)$$

とおくと，$Z(X)$ は，C_Y 上の関数の空間 Z_Y に属することがわかる．ここで，Z_Y としてどのような関数の空間をとるかは，この本で扱う Wess–Zumino–Witten 模型，Chern–Simons 理論において，具体的に考察していく．Z_Y が，ある種の複素直線束のセクションの空間としてとらえられることを説明するのが，ひとつの重要な目標である．Z_Y は**状態空間**(quantum Hilbert space)とよばれる．

シグマ模型のところで述べた性質(1)–(4)から，Z_Y の満たすべき性質が示唆され，理論を構成していく際の指針になる．それらのいくつかを公理の形であげておこう．

(向きに関する性質)　$Z_{-Y} = {Z_Y}^*$

ここで，$-Y$ は Y に反対の向きを与えたもので，右辺は双対空間を示す．

(乗法性)　$Z_{Y_1 \cup Y_2} = Z_{Y_1} \otimes Z_{Y_2}$

(はりあわせの規則)　$Z(X) = \langle Z(X_+), Z(X_-) \rangle$

ここで，$X = X_+ \cup X_-$，$\partial X_+ = Y$，$\partial X_- = -Y$ で，上の右辺は，Z_Y と Z_Y^* の間の自然なペアリングを示す．

Wess–Zumino–Witten 模型とループ群

第1章では，ループ群およびその上の複素直線束について述べ，それを用いて，Wess–Zumino–Witten 模型を定式化する．Σ をコンパクト Riemann 面とし，$f:\Sigma \to G$ をなめらかな写像とする．ここで，G はコンパクト Lie 群で，この本では，主に $G = SU(2)$ の場合を扱う．f に対して Wess–Zumino–Witten 作用 $S_\Sigma(f)$ を定め，その分配関数，つまり，$\exp(-S_\Sigma(f))$ のすべての $f:\Sigma \to G$ の空間における Feynman 経路積分を求めるのが理論の目標である．ここで，Σ が境界をもつ場合に定式化して，$\exp(-S_\Sigma(f))$ は，ループ群上の複素直線束のファイバーの要素とみなせることを示す．また，分配関数は，この複素直線束のセクションとみなせることが期待される．

ループ群上の複素直線束は，ループ群を量子化した対象であり，そのセク

ションの空間には，ループ群の無限小バージョンであるアフィン Lie 環が作用している．アフィン Lie 環の表現論の立場から，分配関数に対応したセクションを規定することが目標である．

共形場理論は，共形変換に対して共変性をもつような，Riemann 面上の作用素の理論である．ここでは，Wess–Zumino–Witten 模型から，このような共形不変な場の理論が構成できることを示す．とくに，Riemann 球面の場合に共形ブロックの空間の次元を与えるフュージョン則を記述する．さらに，共形ブロックの空間のなす，点の配置の空間上のベクトル束について，KZ 接続とよばれる平坦接続が自然に入ることを示す．

Jones–Witten 理論

Jones 多項式は，1980 年代半ばに，Jones によって，作用素環論の視点から発見された，結び目の不変量である．この本では，KZ 方程式のホロノミーとして現れる組みひも群の表現から，Jones 多項式を構成する．1980 年代後半に，Witten によって，Chern–Simons ゲージ理論の立場から，3 次元多様体の位相不変量が提唱され，Jones 多項式についても新しい解釈がなされた．M を向きのついた 3 次元多様体とする．G を Lie 群 $SU(2)$ として，P を M 上の $SU(2)$ 主バンドルとする．$SU(2)$ は単連結なので，P は，位相的には，M 上の自明な $SU(2)$ バンドルとなる．P の接続全体の空間を $\mathcal{A}_M$ とかく．$\mathcal{A}_M$ はアフィン空間となるが，自明な接続を基点にとって，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式の空間 $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ と同一視しておく．P のゲージ群 $\mathcal{G}$ は，M から G へのなめらかな写像全体の空間 $\mathrm{Map}(M,G)$ とみなすことができる．接続の空間 $\mathcal{A}_M$ には，ゲージ群 $\mathcal{G}$ が，引き戻しによって右から作用する．

P の接続 $A\in\mathcal{A}_M$ に対して

$$CS(A)=\frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}\Big(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\Big),\quad A\in\mathcal{A}_M$$

とおき，CS を **Chern–Simons 汎関数**(Chern-Simons functional)とよぶ．Witten による 3 次元多様体の位相不変量は，経路積分を用いて，形式的に

は,

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M/\mathcal{G}} \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(A)\right)\mathcal{D}A$$

と表される．ここで，k は整数である．これを，厳密な数学としてとらえなおすために，M が境界をもつ場合に理論を定式化し，状態空間にあたるものを決定していく．状態空間は，共形場理論における共形ブロックの空間になり，共形ブロックのホロノミーを用いてはりあわせ規則を記述することができる．このようにして，Dehn サージェリー，Heegaard 分解などの多様体の表示を与えたとき，$Z_k(M)$ の記述を得ることができる．

この方法をもう少し詳しく説明すると，およそ次のようになる．境界のある 3 次元多様体 M について，M の境界を Σ とし，Σ 上の $SU(2)$ 接続 α をとる．$\mathcal{A}_M$ の要素で，Σ に制限すると α に一致するようなもの全体にわたって，上の経路積分を形式的に行うと，$Z_k(M)_\alpha$ のすむべき状態空間が定まる．Chern–Simons 汎関数へのゲージ群の作用を用いて計算すると，状態空間は，Σ 上の平坦 $SU(2)$ ベクトル束のモジュライ空間上の複素直線束のセクションの空間ととらえられることがわかる．さらに，Kähler 偏極を用いて，正則切断の空間に制限すると，共形ブロックの空間とよばれる複素ベクトル空間が得られる．ここで，共形ブロックの空間が，**有限次元**の線形空間になることが重要である．出発点は，接続全体の空間における Feynman 経路積分という，無限次元の対象であったが，上のような手続きを経ることにより，有限次元の線形空間を抽出することができる．M を，Riemann 面を境界とする 2 つの多様体に分解することにより，$Z_k(M)$ は，はりあわせ写像の，共形ブロックの空間への作用により記述することができる．これが，上で述べた $Z_k(M)$ の Dehn サージェリー，Heegaard 分解による記述を与える．このように，**無限次元の対象から，有限の不変量を抽出すること**が，この本の一貫したテーマである．

以上は，共形場理論を経由して，Chern–Simons 汎関数の経路積分によって得られる不変量を厳密に理解する手法であったが，最後の章では，もうひとつの手法として，**Chern–Simons 摂動理論**(Chern-Simons perturbation

theory)をとりあげる．有限次元のアナロジーで，積分

$$Z_k = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\,k f(x_1,\cdots,x_n)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

の，$k \to \infty$ における漸近挙動を考えると，適当な仮定のもとで，これは，$f(x_1,\cdots,x_n)$ の臨界点からの寄与の和にわけられ，それぞれの主要項は，臨界点の Hessian を用いて表される．さらに，漸近展開の高次の項は，Feynman ダイアグラムによって，記述される．このような考察を，Chern–Simons 汎関数の経路積分の場合に適用して，Feynman ダイアグラムと Green 形式で表現される 3 次元多様体の位相不変量を構成する．

目　次

1 共形場理論の幾何学

共形場理論は，1980 年代半ばに，Belavin–Polyakov–Zamolodchikov によって，臨界現象に現れる無限次元の対称性を記述する場の理論として導入された．この章では，共形場理論の幾何学的側面を解説する．とくに，Wess–Zumino–Witten 模型から出発して，どのようにして，共形変換で不変な場の理論が構成されるかを述べる．ここで，重要な役割を果たすのが，ループ群とよばれる無限次元 Lie 群とその上の複素直線束である．まず，1.1 節でループ群とその無限小バージョンであるループ代数の中心拡大について解説する．また，ループ群上の複素直線束を具体的に構成する．1.2 節では，アフィン Lie 環とその表現論についてまとめる．とくに，レベル k の最高ウエイト表現と，菅原形式による Virasoro 代数の表現にふれる．1.3 節で，Wess–Zumino–Witten 模型を定式化する．Wess–Zumino–Witten 模型は，Riemann 面 Σ から，Lie 群 G へのなめらかな写像 f に対して，作用 $S(f)$ を定義し，分配関数，すなわち，$\exp(-S(f))$ のすべての f に関する平均を求める理論である．ここでは，境界のある Riemann 面に対して，$\exp(-S(f))$ をループ群上の複素直線束のことばで記述する．1.4 節では，アフィン Lie 環の表現空間を用いて，ある種の不変テンソルとして，共形ブロックの空間を定義する．共形場理論によって，曲面のモジュライ空間上の共形ブロックの空間をファイバーとするベクトル束とその上の接続が構成され，重要な意味をもつが，ここでは，とくに，1.5 節で，Riemann 球面の場合に，

点の配置の空間上のベクトル束とその上の Knizhnik–Zamolodchikov 接続とよばれる平坦接続が導かれる過程を述べる．さらに，1.6 節で，頂点作用素の概念を導入し，物理学者によって，しばしば用いられる，作用素積展開との関係を述べる．ここでは，トーラスの共形ブロックの空間，Verlinde 等式などにもふれる．

§1.1　ループ群とアフィン Lie 環

まず，この本で，重要な役割を果たすループ群を定義する．G を単連結なコンパクト単純 Lie 群として，$S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ から G へのなめらかな写像全体を LG とおく．LG に，

$$(\gamma_1\cdot\gamma_2)(z)=\gamma_1(z)\gamma_2(z),\quad \gamma_1,\gamma_2\in LG$$

により積構造をいれたものを**ループ群**(loop group)とよぶ．ループ群 LG は，無限次元 Lie 群の構造をもつ．以降，Lie 群 G としては，主として，$SU(2)$ の場合を扱う．

ループ代数(loop algebra)とは，ループ群 LG の Lie 環を複素化したものであるが，ここでは，Laurent 級数を用いた形式的なバージョンを用いる．$\mathbb{C}((t))$ を，適当な m を用いて $f(t)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_nt^n$ の形に表される形式的 Laurent 級数全体のなす $\mathbb{C}$ 代数として，

$$L\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((t))$$

とおく．ここで，$\mathfrak{g}$ は，G の Lie 環の複素化である．t は，形式的な変数であるが，今後，$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ のパラメータとみなすこともある．

$L\mathfrak{g}$ の要素 $X\otimes f,\ Y\otimes g$ に対して

$$[X\otimes f, Y\otimes g]=[X,Y]\otimes fg \tag{1.1}$$

として，Lie ブラケットを定めることにより，$L\mathfrak{g}$ は，Lie 環の構造をもつ．

$L\mathfrak{g}$ の中心拡大について説明する．$\widehat{\mathfrak{g}}$ を，$\mathbb{C}$ 上の線形空間としては，$L\mathfrak{g}$ と，c を基底とする $\mathbb{C}$ 上の 1 次元線形空間の直和 $L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}c$ として定める．以下，$\widehat{\mathfrak{g}}=L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}c$ に，c が中心に属するような Lie 環の構造を導入する．ここで，c が中心に属するとは，すべての $\xi\in\widehat{\mathfrak{g}}$ に対して，$[c,\xi]=0$ が成立することで

ある．双線形写像 $\omega: L\mathfrak{g}\times L\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ を用いて，$\hat{\mathfrak{g}}$ のブラケットを

$$[\xi+\alpha c,\ \eta+\beta c]=[\xi,\eta]+\omega(\xi,\eta)c,\quad \xi,\eta\in L\mathfrak{g},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

で定めるとき，これが，実際に Lie 環の構造を与えるための条件は，すべての $x,y,z\in L\mathfrak{g}$ に対して，

$$\omega(x,y)=-\omega(y,x) \tag{1.2}$$

$$\omega([x,y],z)+\omega([y,z],x)+\omega([z,x],y)=0 \tag{1.3}$$

が満たされることである．実際，条件(1.2)は，交代性 $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$ に対応し，また，条件(1.3)は，Jacobi 等式に対応する．

このような ω に対して，$\hat{\mathfrak{g}}$ の Lie ブラケットは，

$$[X\otimes f,\ Y\otimes g]=[X,Y]\otimes fg+\omega(X\otimes f,\ Y\otimes g)c$$

で与えられる．ω に関する条件(1.3)は，**2–コサイクル条件**(2-cocycle condition)とよばれる．また，条件(1.2), (1.3)を満たす双線形写像 ω, ω' が，$L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}c$ に，同型な Lie 環の構造を定めるための必要十分条件は，ある線形写像 $\mu: L\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ が存在して，すべての，$x,y\in L\mathfrak{g}$ に対して，

$$\omega(x,y)=\omega'(x,y)+\mu([x,y])$$

であることが示される．このようにして，条件(1.2), (1.3)を満たす ω に対して，$L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}c$ に，c が中心に属するような Lie 環の構造を入れることができるが，これを，$L\mathfrak{g}$ の**中心拡大**(central extension)とよぶ．

一般に，Lie 環のコホモロジーの言葉を準備しておこう．複素 Lie 環 $\mathfrak{a}$ と，左 $\mathfrak{a}$ 加群 M について，$\mathfrak{a}$ の M を係数とする p 次のコチェイン群 $C^p(\mathfrak{a},M)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\bigwedge^p\mathfrak{a},M\right)$ で定義する．微分 $d_p: C^p(\mathfrak{a},M)\to C^{p+1}(\mathfrak{a},M)$ を，$\omega\in C^p(\mathfrak{a},M)$ に対して，

$$\begin{aligned}(d\omega)&(x_0,x_1,\cdots,x_p)\\&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i x_i\omega(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_p)\\&\quad+\sum_{0\leqq i<j\leqq p}(-1)^{i+j}\omega([x_i,x_j],x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_p)\end{aligned}$$

で定める．ここで，$\hat{x}_i$ は，成分 x_i をのぞくことを意味する．このようにし

て得られる複体のコホモロジー群

$$H^p(\mathfrak{a}, M) = \operatorname{Ker} d_p / \operatorname{Im} d_{p-1}$$

を，M を係数とする Lie 環 $\mathfrak{a}$ の p 次コホモロジー群とよぶ．

上で述べたように，$H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ の要素に対して，ループ代数 $L\mathfrak{g}$ の中心拡大の同型類が定まる．逆に，

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{L\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} L\mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

を，$L\mathfrak{g}$ の中心拡大とする．線形空間としてのセクション $s: L\mathfrak{g} \to \widetilde{L\mathfrak{g}}$，つまり，$\pi \circ s = id$ となる線形写像をとる．$Z \in L\mathfrak{g}$ に対して $s(Z) = \widetilde{Z}$ とかき，

$$\eta(X, Y) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}, \quad X, Y \in L\mathfrak{g}$$

とおくと，η は，s のとり方によらずに，$H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ の要素を定めることがわかる．このようにして，ループ代数 $L\mathfrak{g}$ の中心拡大の同型類と，$H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ の要素との間に一対一対応があることが示されるが，これは，一般の Lie 環に対しても，よく知られた事実である．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の **Cartan–Killing 形式**を

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

で表す．これは，対称な双線形形式で，$\mathfrak{g}$ のアジョイント作用によって不変である．つまり，任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle$$

が成立する．例えば，1.2 節でも述べるように，$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ のとき $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY)$ は，$\mathfrak{g}$ の Cartan–Killing 形式を定める．ループ代数 $L\mathfrak{g}$ に対して，実際に次のように，2–コサイクルを構成することができる．

命題 1.1　ループ代数 $L\mathfrak{g}$ について，$H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ であり，これは，

$$\omega(X \otimes f, Y \otimes g) = \langle X, Y \rangle \ \mathrm{Res}_{t=0}(df g)$$

で定まる 2–コサイクル ω によって生成される．ここで，$\mathrm{Res}_{t=0}\left(\sum_n c_n t^n dt\right) = c_{-1}$ としている．

［証明］　まず，2–コサイクル α について α の属するコホモロジー類は，Lie 群 G の共役による作用で不変な要素によって代表されることを示そう．G の要素 g を $\exp(tZ)$, $Z \in \mathfrak{g}$ と表すと，$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$gXg^{-1} = X + t[Z, X] + \mathcal{O}(t^2)$ となっているので，等式(1.3)を用いると

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\alpha(gXg^{-1},gYg^{-1})-\alpha(X,Y)]=\alpha(Z,[X,Y])$$

が得られる．この式の右辺は，$\mu_Z : L\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ を $\mu_Z(U)=\alpha(Z,U)$ で定めると $\mu_Z([X,Y])$ と表すことができる．したがって，Lie 群 G の共役の作用の無限小バージョンによって，コホモロジー類は変わらないことになる．このことを用いると，Lie 群 G の不変測度で上の作用を平均化することにより，G 不変なコホモロジーの代表元がただひとつ得られることがわかる．

2–コサイクル $\alpha : \bigwedge^2 L\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ に対して，$\alpha_{m,n}(X,Y)=\alpha(X\otimes t^m, Y\otimes t^n)$ とおく．ここで，$\alpha_{m,n}$ は，Lie 群 G の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}$ の，$\mathfrak{g}$ 不変な双一次形式であるとしてよい．$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 環であることから，これは，対称形式になる．さらに，α が交代形式になることから，$\alpha_{m,n}=-\alpha_{n,m}$ がしたがう．また，α が 2–コサイクルであるという条件は，

$$\alpha_{m+n,p}+\alpha_{n+p,m}+\alpha_{p+m,n}=0$$

と表される．まず，$n=p=0$ とおくと $\alpha_{m,0}=0$ となる．$p=-m-n$, $n=1$ とした場合に上の式から得られる漸化式から，$\alpha_{m,-m}=m\alpha_{1,-1}$ が導かれる．さらに，$p=q-m-n$ とおくと，$\alpha_{q-m-n,m+n}=\alpha_{q-m,m}+\alpha_{q-n,n}$ となり，これを用いて $\alpha_{q-k,k}=k\alpha_{q-1,1}$ が得られる．さらに，$q\alpha_{q-1,1}=\alpha_{0,q}=0$ より，$m+n\neq 0$ のとき $\alpha_{m,n}=0$ がしたがう．以上をまとめて，

$$\alpha_{m,n}=m\delta_{m+n,0}\alpha_{1,-1}$$

となることがわかる．$\alpha_{1,-1} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ は，$\mathfrak{g}$ 不変な内積なので，定数倍をのぞいて，Cartan–Killing 形式に限ることがわかる．$\alpha_{1,-1}$ として，Cartan–Killing 形式をとることにより，求める 2–コサイクル ω の形が得られる．この 2–コサイクルがコホモロジー類として自明でないことは，例えば，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の基底のひとつ H をとると，ループ代数の Lie ブラケットについて，$[H\otimes t, H\otimes t^{-1}]=0$ となるが，$\langle H,H\rangle\neq 0$ であることよりただちにしたがう．以上で，命題が証明された．∎

$\hat{\mathfrak{g}}$ を，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に付随する**アフィン Lie 環**(affine Lie algebra)とよぶ．ここで定めた Lie ブラケットは

$$(1.4)\qquad [X\otimes t^m, Y\otimes t^n]=[X,Y]\otimes t^{m+n}+\langle X,Y\rangle m\delta_{m+n,0}c$$

とも表される.

複素平面の単位円 S^1 からそれ自身への向きを保つ微分同相写像全体を $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ とかく. $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ は無限次元の Lie 群の構造をもち，その Lie 環は，S^1 のなめらかなベクトル場全体 $\mathrm{Vect}\, S^1$ である. 複素化 $[\mathrm{Vect}\, S^1]\otimes\mathbb{C}$ の要素で，Laurent 多項式 $f(z)$ を用いて

$$f(z)\frac{d}{dz}$$

の形に表されるベクトル場として，$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に拡張できるもの全体を考える.

$$\mathcal{A}=\left\{ f(z)\frac{d}{dz} \;\middle|\; f(z)\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]\right\}$$

とおく. ここで，$\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ は，Laurent 多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 代数を表す. $\mathcal{A}$ は，Lie ブラケットを

$$\left[f(z)\frac{d}{dz},\ g(z)\frac{d}{dz}\right]=\{f(z)g'(z)-g(z)f'(z)\}\frac{d}{dz}$$

で定めることによって，Lie 環の構造をもつ. これは，無限次元 Lie 環で

$$L_n=-z^{n+1}\frac{d}{dz},\quad n\in\mathbb{Z}$$

を基底にもつ. ベクトル場 L_n は，$z=e^{i\theta}$ とおいて，S^1 に制限すると，

$$L_n=ie^{in\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

と表すことができる. 上の Lie ブラケットに関して L_n, $n\in\mathbb{Z}$ は

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n} \tag{1.5}$$

を満たしている. また，ベクトル場 L_n は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の無限小変換

$$\varphi_t(z)=z-tz^{n+1}$$

を生成し，L_n, $n\in\mathbb{Z}$ のうち，Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ 全体になめらかなベクトル場として拡張できるのは，L_0, L_{-1}, L_1 である. これらは，

$$[L_0,L_1]=-L_1,\quad [L_0,L_{-1}]=L_{-1},\quad [L_1,L_{-1}]=2L_0$$

を満たしていて，Lie 環 $sl_2(\mathbb{C})$ を生成する. アフィン Lie 環の場合と同様に，2–コサイクル条件を満たす交代双線形写像 $\alpha:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ によって，$\mathcal{A}$ の中

心拡大を構成することができる．次の命題が成立する．

命題 1.2 Laurent 多項式ベクトル場のなす Lie 代数 $\mathcal{A}$ に対して, $H^2(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ であり，これは,

$$\omega\left(f\frac{d}{dz},\ g\frac{d}{dz}\right) = \frac{1}{12}\,\mathrm{Res}_{z=0}(f'''g\ dz)$$

で定まる 2–コサイクル ω によって生成される．

［証明］ α を 2–コサイクルとして，$\alpha_{p,q} = \alpha(L_p, L_q)$ とおく．(L_0, L_p, L_q) に対して α の 2–コサイクル条件をかくと，α のコホモロジー類は，原点を中心とする回転によって不変であることがわかる．したがって，平均化して，α 自身が，回転で不変であるとしてよい．このとき，$p+q\neq 0$ ならば $\alpha_{p,q} = 0$ になるので，$\alpha_p = \alpha_{p,-p}$ とおく．$\alpha_{-p} = -\alpha_p$ を用いると，2–コサイクル条件は,

$$(p+2q)\alpha_p - (2p+q)\alpha_q = (p-q)\alpha_{p+q}$$

と表される．このことから，$\alpha_p = \lambda p^3 + \mu p$ の形になることがわかる．μ の値を変えてもコホモロジー類は変わらないが，とくに，$\lambda = \dfrac{1}{12}$, $\mu = -\dfrac{1}{12}$ とおくと，求める 2–コサイクル ω が得られる． ∎

命題 1.2 の 2–コサイクル ω を用いて，$\mathcal{V} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}c$ に,

$$\left[f\frac{d}{dz} + \alpha c,\ g\frac{d}{dz} + \beta c\right] = \left[f\frac{d}{dz},\ g\frac{d}{dz}\right] + \omega\left(f\frac{d}{dz},\ g\frac{d}{dz}\right)c, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

によって，Lie ブラケットを定めることにより，$\mathcal{A}$ の中心拡大が得られる．$\mathcal{V}$ を **Virasoro 代数**(Virasoro algebra)とよぶ．Virasoro 代数の Lie ブラケットは,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c \tag{1.6}$$

と表すことができる．

次に，Lie 群 G の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ のループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束，および $LG_{\mathbb{C}}$ の中心拡大について説明する．これは，後に説明する Wess–Zumino–Witten 模型において，基本的な役割を果たすものである．

一般に，M を微分多様体，L を M 上の複素直線束として，L の接続 ∇ を

固定する．局所的に，M の開集合 U 上で，複素直線束 L が，$U\times\mathbb{C}$ と自明化されているとして，接続 ∇ を，U 上で，$\nabla=d-2\pi\sqrt{-1}\,\alpha$ と表しておく．ここで，α は，U 上定義された1次微分形式である．L を局所的に自明化する開集合で M をおおって，それぞれの開集合で，上の構成を行うと，$d\alpha$ は，M 上，2次の閉微分形式を定めることがわかる．これを，接続 ∇ の第一 Chern 形式とよび，$c_1(\nabla)$ で表す．$c_1(\nabla)$ を ω とかくと，よく知られているように，ω は，$d\omega=0$ を満たし，ω の定めるコホモロジー類は，接続 ∇ の選び方にはよらずに，$H^2(M,\mathbb{Z})$ の要素を定める．これが，L の第一 Chern 類であった．

M を単連結な微分多様体とする．M 上の点 x_0 を基点とする，M のループにそった接続 ∇ のホロノミーは，次のように記述される．γ を境界にもつような，向きのついた2次元円板を D とすると，L の x_0 上のファイバー L_{x_0} の要素 u から出発して，γ にそって，接続 ∇ についての平行移動をほどこし，再び，x_0 にもどってきた結果は，Stokes の定理より，

$$u\exp\Big(2\pi\sqrt{-1}\int_D c_1(\nabla)\Big)$$

で表される．逆の構成として，次の命題を示そう．

命題 1.3　M を単連結な微分多様体とする．M 上の2次微分形式 ω で，$d\omega=0$ を満たし，かつ，ω のコホモロジー類が，$H^2(M,\mathbb{Z})$ の要素を定めるものをとる．つまり，ω の de Rham コホモロジー類は, 自然な写像

$$i: H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{R})$$

の像に属しているとする．このとき，M 上の複素直線束 L とその接続 ∇ で，その第一 Chern 形式 $c_1(\nabla)$ が ω に一致するものが定まる．

［証明］　複素直線束 L を次のように構成する．x_0 を始点とする M のなめらかな道全体の集合を $\mathcal{P}_{x_0}(M)$ とおく．つまり，$\mathcal{P}_{x_0}(M)$ は，なめらかな写像 $p:[0,1]\to M$ で，$p(0)=x_0$ を満たすもの全体である．直積 $\mathcal{P}_{x_0}(M)\times\mathbb{C}$ に，次のように，同値関係 $\sim$ を導入する．$\mathcal{P}_{x_0}(M)\times\mathbb{C}$ の要素 $(p,u),(q,v)$ に対して，$(p,u)\sim(q,v)$ であるとは，$p(1)=q(1)$ であって，さらに，

$$v = u\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\int_D \omega\right)$$

を満たすことであると定める．ここで，D は，その境界が，p と q^{-1} の合成として得られるループとなるような，M の，向きのついた 2 次元円板である．ω のコホモロジー類が，$H^2(M,\mathbb{Z})$ の要素を定めるという仮定から，この定義は，D の選び方にはよらずに，意味をもつ．$L=\mathcal{P}_{x_0}(M)\times\mathbb{C}/\sim$ とおく．射影 $\pi: L\to M$ を，$\pi(p,u)=p(1)$ で定めることにより，L は M 上の複素直線束の構造をもつ．同値関係の定義から，L には，平行移動が指定されるので，これによって，自然に接続が定まり，また，上の考察から，この接続の第一 Chern 形式 は ω に一致する． ∎

以下，$G=SU(2)$ として，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束を記述する．$G_{\mathbb{C}}$ は G の複素化で，この場合は，$G_{\mathbb{C}}=SL(2,\mathbb{C})$ である．まず，ループ群 LG が，単連結であることを示そう．ΩG を $\gamma\in LG$ で，$\gamma(1)=e$ を満たすもの全体とおく．また，G を，定数写像として，LG に埋め込んでおく．LG は，直積 $G\times\Omega G$ と同相なので，

$$\pi_1(LG)\cong\pi_1(G)\oplus\pi_1(\Omega G)\cong\pi_1(G)\oplus\pi_2(G)$$

が成立する．ここで，G は単連結で，$\pi_2(G)=0$ なので，LG は，単連結であることがわかる．同様にして，$LG_{\mathbb{C}}$ は，単連結であることが示される．ここで，命題 1.3 の構成を，$LG_{\mathbb{C}}$ に対して適用すると，$LG_{\mathbb{C}}$ 上の 2 次微分形式 ω で，$d\omega=0$ を満たし，かつ，そのコホモロジー類が，$H^2(LG_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})$ の要素を定めるものに対して，$LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束を構成することができる．

このような 2 次微分形式の具体的な形を与える．$LG_{\mathbb{C}}$ の Lie 環 $Lie(LG_{\mathbb{C}})$ は，S^1 から $\mathfrak{g}$ へのなめらかな写像全体とみなすことができる．ここで，$\mathfrak{g}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の Lie 環 $sl_2(\mathbb{C})$ である．このような写像を Fourier 展開して，命題 1.1 と同様の方法で，$Lie(LG_{\mathbb{C}})$ の 2–コサイクルを，$\xi,\eta\in Lie(LG_{\mathbb{C}})$ に対して

$$\omega(\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\langle\xi'(\theta),\eta(\theta)\rangle d\theta \tag{1.7}$$

によって定める．これが，実際に Lie 環 $Lie(LG_{\mathbb{C}})$ の 2–コサイクルを与えることは容易に確かめられる．また，ω は，Lie 群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上の左不変な微分形式

を定め，2–コサイクル条件から，これは，閉微分形式になることがわかる．

この微分形式 ω が，整数係数のコホモロジー $H^2(LG_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ の要素を与えることが，次にように示される．$SU(2)$ の要素 X に対して，$X^{-1}dX$ は，Lie 環 $su(2)$ に値をとる $SU(2)$ 上の1次微分形式で，$SU(2)$ の左作用に関して不変である．微分形式 $X^{-1}dX$ は，$SU(2)$ の **Maurer–Cartan 形式**とよばれる．3次微分形式

$$\sigma = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(X^{-1}dX \wedge X^{-1}dX \wedge X^{-1}dX) \tag{1.8}$$

の定める de Rham コホモロジー類は，$H^3(SU(2), \mathbb{Z})$ の生成元となる．LG 上の微分形式 ω_0 を次のように定義する．写像 $\phi: LG \times S^1 \to G$ を $\phi(\gamma, z) = \gamma(z)$ で定義し，

$$\omega_0 = -\int_{S^1} \phi^* \sigma$$

とおく．定義から，ω_0 は，$d\omega_0 = 0$ を満たし，ω_0 の de Rham コホモロジー類は，$H^2(LG, \mathbb{Z})$ の要素を定める．また，ω_0 は，自然に，$LG_{\mathbb{C}}$ に拡張される．

$LG_{\mathbb{C}}$ の $\gamma \in LG_{\mathbb{C}}$ における接空間を $T_\gamma LG_{\mathbb{C}}$ とかき，左不変ベクトル場によって，これを，$Lie(LG_{\mathbb{C}})$ と同一視する．$LG_{\mathbb{C}}$ 上の1次微分形式 β を，$\gamma \in LG_{\mathbb{C}}, \xi \in T_\gamma LG_{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\beta_\gamma(\xi) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \langle \gamma(\theta)^{-1}\gamma'(\theta), \gamma(\theta)^{-1}\xi(\theta) \rangle d\theta$$

とおく．このとき，$\omega = \omega_0 + d\beta$ が成立していることを確かめることができる．したがって，ω も整数係数のコホモロジー類を定めることがわかる．これまでの議論をあわせると，ω を第一 Chern 形式としてもつような，$LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束とその上の接続を構成することができる．この複素直線束を $LG_{\mathbb{C}}$ 上の基本複素直線束とよぶ．実は，$H^2(LG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で，これは，(1.7)で定義される ω の de Rham コホモロジー類で生成されることが知られている．

§1.2　アフィン Lie 環の表現

一般に複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の線形表現とは，$\mathfrak{g}$ から複素線形空間 V の線形変換全体 $\mathrm{End}(V)$ への線形写像 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ で，

$$\rho([X,Y])=\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X)$$

を満たすものである．このとき，V を左 $\mathfrak{g}$ 加群，あるいは，単に $\mathfrak{g}$ 加群とよぶ．また，$X\in\mathfrak{g}$, $v\in V$ に対して，$\rho(X)v$ を，Xv と略記することもある．この節では，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現について，この本で必要になる程度の内容をまとめておく．詳細は，文献[8]などを参照されたい．ここでは，$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の場合に説明する．このとき，$\hat{\mathfrak{g}}$ は，タイプ $A_1^{(1)}$ のアフィン Lie 環とよばれる．

まず，$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の表現論を復習しておこう．$sl_2(\mathbb{C})$ とは，2 行 2 列の複素行列でトレースが 0 になるもの全体で，

$$[X,Y]=XY-YX,\quad X,Y\in sl_2(\mathbb{C})$$

によって，Lie 環の構造を入れる．複素線形空間としては，$sl_2(\mathbb{C})$ は 3 次元で

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

が，その基底をなす．これらは，交換関係

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H$$

を満たしている．$X,Y\in\mathfrak{g}$ について，$\langle X,Y\rangle=\mathrm{Tr}(XY)$ とおくと，$\mathfrak{g}$ の，非退化な対称双線形形式が定まる．これが，$\mathfrak{g}$ の Cartan–Killing 形式である．上の生成元 H,E,F については，$\langle H,H\rangle=2$, $\langle E,F\rangle=1$, $\langle H,E\rangle=0$, $\langle H,F\rangle=0$ となっている．Cartan–Killing 形式に関する正規直交基底 $\{I_\mu\}$ をとり，$\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ の要素 C を $C=\sum_\mu I_\mu I_\mu$ によって定める．C を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の **Casimir 元**とよぶ．Casimir 元は

$$C=\frac{1}{2}H^2+EF+FE$$

とも表すことができて，すべての $X\in U(\mathfrak{g})$ に対して $[C,X]=0$ が成り立つ

ことが確かめられる.

λ を複素数とする. $\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ として，左 $\mathfrak{g}$ 加群 V が，最高ウエイト λ の**最高ウエイト表現**(highest weight representation)であるとは，次の条件(1), (2)が満たされることである.

（1） V に 0 ではないベクトル v が存在して，$Hv=\lambda v$, $Ev=0$ が満たされる.

（2） V は，複素線形空間として，$F^n v$, $n=0,1,\cdots$ で生成される.

条件(1)のベクトル v を，**最高ウエイトベクトル**(highest weight vector)とよぶ. また，条件(2)で，$F^n v$, $n=0,1,\cdots$ がすべて一次独立であるとき，V を最高ウエイト λ の **Verma 加群**(Verma module)とよび，M_λ で表す. なお，ここでは，λ を複素数としているが，一般の Lie 環については，最高ウエイトは，Cartan 部分代数の双対空間の要素として，定式化される.

複素数 λ を一般にとると，Verma 加群 M_λ は既約 $\mathfrak{g}$ 加群になるが，特別な λ に対しては，M_λ の極大部分加群による商加群として，$\mathfrak{g}$ の既約表現を構成することができる. λ を 0 以上の整数として，$\lambda=2j$ とおく. V_λ を，基底 u_m, $m=j,j-1,\cdots,-j+1,-j$ をもつ，$\lambda+1$ 次元の複素ベクトル空間とする. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の V_λ への作用を

$$
\begin{aligned}
Hu_m &= 2mu_m \\
Eu_m &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\; u_{m+1} \\
Fu_m &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\; u_{m-1}
\end{aligned}
$$

によって定める. このとき，u_j が最高ウエイトベクトルである. また，$F^{\lambda+1}u_j=0$ となっていて，V_λ は，Verma 加群の商加群として表される，$\lambda+1$ 次元の既約表現となる. V_λ を $sl_2(\mathbb{C})$ のスピン j の既約表現とよぶこともある. Casimir 元 C は，$U(\mathfrak{g})$ の中心に属するので，既約表現 V_λ に，スカラー倍として作用する. その値は，最高ウエイトベクトルへの作用を計算することにより，$2j(j+1)$ であることが確かめられる. $sl_2(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現は，すべて，上のようにして構成された表現のいずれかと同型であることが知られている.

V_λ の双対空間 $V_\lambda^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_\lambda, \mathbb{C})$ に対して，$\mathfrak{g}$ の V_λ^* への右からの作用を $\langle \xi X, \eta \rangle = \langle \xi, X\eta \rangle$，$\xi \in V_\lambda^*$，$\eta \in V_\lambda$，$X \in \mathfrak{g}$ を満たすように，一意的に定めることができる．ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は，V_λ^* と V_λ の自然なペアリングである．このようにして得られる右 $\mathfrak{g}$ 加群 V_λ^* を，$\mathfrak{g}$ の最高ウエイト λ の右既約表現とよぶ．V_λ の基底 $\{u_m\}$ の双対基底を $\{u_m^*\}$ で表すと，この右作用について，$u_m^* H = 2mu_m$，$u_j^* F = 0$ が成立し，V_λ^* は，$u_j^* E^n$，$n = 0, 1, \cdots, \lambda$ によってはられている．

また，この右からの作用を用いて，$\mathfrak{g}$ の V_λ^* への作用 ρ^* を $\rho^*(X)\xi = -\xi X$，$X \in \mathfrak{g}$，$\xi \in V_\lambda^*$ で定めると，

$$\rho^*([X,Y]) = \rho^*(X)\rho^*(Y) - \rho^*(Y)\rho^*(X)$$

が満たされていて，これにより，V_λ^* は，左 $\mathfrak{g}$ 加群の構造をもつ．これを，もとの表現 V_λ の**双対表現**(dual representation)とよぶ．ここで扱っている $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ の場合，V_λ は，その双対表現 V_λ^* と左 $\mathfrak{g}$ 加群として同型である．

一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 V, W に対して，$\mathfrak{g}$ の $V \otimes W$ への作用を

$$X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v \in V, \quad w \in W$$

で定め，これを表現の**テンソル積**(tensor product)とよぶ．$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ の場合，表現のテンソル積の既約表現への分解に関して，次の命題は，**Clebsch–Gordan 則**としてよく知られている．

命題 1.4 (Clebsch–Gordan 則)　$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ の既約表現のテンソル積について，

$$\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

となるための必要十分条件は

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \in 2\mathbb{Z}$$
$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_1 + \lambda_2$$

が満たされることである．上の条件が満たされないときは，$\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3}, \mathbb{C}) = 0$ となる．　□

とくに，$V = V_1$ のテンソル積の既約成分への分解について，

$$V \otimes V = V_0 \oplus V_2$$
$$V \otimes V \otimes V = 2V_1 \oplus V_3$$

$$V\otimes V\otimes V\otimes V = 2V_0\oplus 3V_2\oplus V_4$$

などが成立する，表現空間の前の数は，表現の重複度を示していて，一般的には，二項係数を用いて表すことができる．

次にアフィン Lie 環の表現について述べる．Laurent 級数 $f(t)\in\mathbb{C}((t))$ で，$f(t)=\sum_{n>0} a_n t^n$ の形に表されるもの全体を A_+，また，$f(t)=\sum_{n<0} a_n t^n$ の形に表されるもの全体を A_- で表す．アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 環 $\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_-$ を，それぞれ，

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_+ &= [\mathfrak{g}\otimes A_+]\oplus\mathbb{C}E\\ \mathcal{N}_0 &= \mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}c\\ \mathcal{N}_- &= [\mathfrak{g}\otimes A_-]\oplus\mathbb{C}F\end{aligned}$$

で定めると，Lie 環としての直和分解

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{N}_+\oplus\mathcal{N}_0\oplus\mathcal{N}_-$$

が成立する．

k, λ を複素数とする．$\hat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\hat{V}_{k,\lambda}$ が $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k，最高ウエイト λ の表現であるとは，次の条件(1), (2)が満たされることである．

（1）$\hat{V}_{k,\lambda}$ に 0 でないベクトル v が存在し，$\mathcal{N}_+ v=0$，$cv=kv$，$Hv=\lambda v$ が成立する．

（2）$U(\mathcal{N}_-)$ を $\mathcal{N}_-$ の展開環とすると，$\hat{V}_{k,\lambda}=U(\mathcal{N}_-)v$ が成立する．

条件(1), (2)と，c が $\hat{\mathfrak{g}}$ の中心に属することを用いると，すべての $u\in\hat{V}_{k,\lambda}$ に対して，$cu=ku$ が成立することがわかる．条件(1)に現れる v は，$\hat{V}_{k,\lambda}$ の最高ウエイトベクトルとよばれる．$\hat{V}_{k,\lambda}$ は，$a_1\cdots a_r v$，$a_1,\cdots,a_r\in\mathcal{N}_-$，$r\geqq 0$ の形の要素で生成される．

$\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k，最高ウエイト λ の表現で，$U(\mathcal{N}_-)$ 上，v を生成元とするランク 1 の自由加群となるものを **Verma 加群**とよび，$M_{k,\lambda}$ で表す．$\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k，最高ウエイト λ の表現 $\hat{V}_{k,\lambda}$ は，一般に，$M_{k,\lambda}$ の商加群として表される．つまり，$M_{k,\lambda}$ の部分加群 N を用いて，$\hat{V}_{k,\lambda}=M_{k,\lambda}/N$ と表すことができる．とくに，N として，極大な部分加群をとれば，商加群として，$\hat{\mathfrak{g}}$ の既約表現を得ることができる．一般のパラメータ k, λ に対しては，Verma 加群 $M_{k,\lambda}$ 自身が既約になるが，特別の k, λ については，Verma 加群が，実際に

可約になることが知られている．k が正の整数のとき，Kac によって，次の結果が知られている．

命題 1.5　k が正の整数で，λ が，$0 \leqq \lambda \leqq k$ を満たす整数とする．$\chi = (E \otimes t^{-1})^{k-\lambda+1} v$ は，$\mathcal{N}_+ \chi = 0$ を満たし，$U(\mathcal{N}_-)\chi$ は，$M_{k,\lambda}$ の極大部分加群となる．商加群

$$\mathcal{H}_{k,\lambda} = M_{k,\lambda} / U(\mathcal{N}_-)\chi$$

は，$\hat{\mathfrak{g}}$ の既約表現になる．ここで，v は，上で説明した，Verma 加群の生成元である．　□

このようにして，レベル k，最高ウエイト λ の既約表現が構成された．この表現は，integrable highest weight module とよばれている．命題 1.5 の証明については，文献[8]などを参照されたい．上の条件を満たす λ を，レベル k の最高ウエイトとよぶ．また，χ を**ヌルベクトル**(null vector)とよぶ．$\mathcal{H}_{k,\lambda}$ は，$sl_2(\mathbb{C})$ の有限次元の既約表現 V_λ を部分空間として含んでいる．レベル k が固定されていることが明確な状況では，$\mathcal{H}_{k,\lambda}$ を $\mathcal{H}_\lambda$ と略記することもある．

また，$\mathcal{H}_\lambda$ の双対空間 $\mathcal{H}_\lambda^*$ について，右 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造を，自然なペアリングに関して，$\langle \xi\alpha, \eta \rangle = \langle \xi, \alpha\eta \rangle$, $\xi \in \mathcal{H}_\lambda^*$, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda$, $\alpha \in \hat{\mathfrak{g}}$ を満たすように，一意的に定めることができる．この右作用については，$\mathcal{H}_\lambda^*$ に，右 $U(\mathcal{N}_+)$ 加群としての生成元 v^* が存在して，$v^* \mathcal{N}_- = 0$ が満たされている．

また，この右からの作用を用いて，$\hat{\mathfrak{g}}$ の $\mathcal{H}_\lambda^*$ への作用 ρ^* を $\rho^*(X \otimes t^n)\xi = -\xi X \otimes t^{-n}$, $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathcal{H}_\lambda^*$ で定めると，これにより，$\mathcal{H}_\lambda^*$ は，左 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造をもつ．これを，$\mathcal{H}_\lambda$ の**双対表現**(dual representation)とよぶ．

次に，Virasoro 代数の $\mathcal{H}_\lambda$ への作用について説明する．$\mathrm{Diff}^+(S^1)$ は，ループ群 LG に，写像 $f: S^1 \to G$ のパラメータ付けのとりかえとして作用する．アフィン Lie 環は，ループ群の Lie 代数の形式的なバージョンであるループ代数の中心拡大であるから，その表現空間に，S^1 上の多項式ベクトル場のなす Lie 代数の中心拡大である Virasoro 代数が作用することを期待するのは自然である．実際，次のような，**菅原作用素**(Sugawara operator)とよばれる Casimir 元の無限次元への拡張が知られていて，それにより，Virasoro 代数

の $\mathcal{H}_{k,\lambda}$ への作用を定義することができる．

菅原作用素は，具体的には，$\{I_\mu\}$ を Cartan–Killing 形式に関する $\mathfrak{g}$ の基底として，$n \neq 0$ の場合は，

$$L_n = \frac{1}{2(k+2)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\mu} I_\mu \otimes t^{-j} \cdot I_\mu \otimes t^{n+j} \tag{1.9}$$

として，また，$n=0$ の場合は，

$$L_0 = \frac{1}{k+2} \sum_{j\geqq 1} \sum_{\mu} I_\mu \otimes t^{-j} \cdot I_\mu \otimes t^{j} + \frac{1}{2(k+2)} \sum_{\mu} I_\mu \cdot I_\mu \tag{1.10}$$

として形式的に定義する．上の $n\neq 0$ の場合については，$I_\mu \otimes t^{-j} \cdot I_\mu \otimes t^{n+j} = I_\mu \otimes t^{n+j} \cdot I_\mu \otimes t^{-j}$ が成立している．また，L_n の定義式は無限和を含んでいるが，レベル k の最高ウエイト表現 $\mathcal{H}_{k,\lambda}$ の要素 v に対して，$L_n v$ はつねに有限和として表されることに注意しよう．基底 I_μ，$\mu=1,2,3$ に対して，$[L_m, I_\mu \otimes t^n]$ を計算することによって，次の命題を示すことができる．

命題 1.6　整数 m,n について，$\hat{\mathfrak{g}}$ の表現空間 $\mathcal{H}_{k,\lambda}$ への作用としての交換関係

$$[L_m, X\otimes t^n] = -nX\otimes t^{m+n}, \quad X\in\mathfrak{g}$$

を満たす．　□

さらに，命題 1.6 を用いて計算すると次の命題が得られる．

命題 1.7　菅原作用素 L_m，$m\in\mathbb{Z}$ は，$\mathcal{H}_{k,\lambda}$ への作用としての交換関係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\frac{3k}{k+2}$$

を満たす．つまり，菅原作用素によって $\mathcal{H}_{k,\lambda}$ は Virasoro 代数の表現空間になり，c の作用は，$\dfrac{3k}{k+2}$ によるスカラー倍となる．　□

作用素 L_0 の固有値によって，$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{k,\lambda}$ は，次のように，分解することができる．まず，L_0 の V_λ への作用は，$u\in V_\lambda$ に対して，

$$L_0 u = \frac{1}{2(k+2)}\Big(\sum_{\mu} I_\mu \cdot I_\mu\Big)u = \frac{j(j+1)}{k+2}u$$

となる．ここで，$\lambda = 2j$ とおいた．この固有値 $\dfrac{j(j+1)}{k+2}$ を Δ_λ で表し，**共形**

ウエイト(conformal weight)とよぶ．命題 1.6 を用いると，L_0 の $\mathcal{H}_\lambda$ における固有値は，d を 0 以上の整数として，$\Delta_\lambda+d$ と表される．固有値 $\Delta_\lambda+d$ に属する固有空間を $\mathcal{H}_{\lambda,d}$ とおくと，直和分解

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{d\geqq 0} \mathcal{H}_{\lambda,d} \tag{1.11}$$

が成立する．ここで，それぞれの $\mathcal{H}_{\lambda,d}$ は有限次元で，とくに，$\mathcal{H}_{\lambda,0}=V_\lambda$ となっている．

§1.3 Wess–Zumino–Witten 模型

Σ を境界のないコンパクト Riemann 面とする．Lie 群 $G=SU(2)$ をとり，$f:\Sigma\to G$ をなめらかな写像とする．

1.1 節でも説明したように，$SU(2)$ の要素 X に対して，Maurer–Cartan 形式 $\theta=X^{-1}dX$ は，Lie 環 $su(2)$ に値をとる $SU(2)$ 上の 1 次微分形式で，$SU(2)$ の左作用に関して不変である．また，3 次微分形式

$$\sigma = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(\theta\wedge\theta\wedge\theta)$$

は，$SU(2)$ の左不変な体積要素で，その de Rham コホモロジー類は，$H^3(SU(2),\mathbb{Z})$ の生成元となる．

なめらかな写像 $f:\Sigma\to G$ に対して，積分

$$E_\Sigma(f) = -\sqrt{-1}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial f\wedge f^{-1}\overline{\partial} f)$$

を写像 f の**エネルギー**(energy)とよぶ．以下，レベルとよばれる整数 k を固定する．写像 f のエネルギーを用いて，**Wess–Zumino–Witten 作用** $S_\Sigma(f)$ を，

$$S_\Sigma(f) = \frac{k}{4\pi}E_\Sigma(f) - \frac{\sqrt{-1}\,k}{12\pi}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f})$$

で定義する．ここで，B は Σ を境界とするような，向きのついたコンパクト 3 次元多様体で，$\tilde{f}:B\to G$ は，f のなめらかな写像としての拡張である．

また，$\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}$ は Maurer–Cartan 形式 $X^{-1}dX$ の $\tilde{f}$ による引き戻しを表す．

補題 1.8　Wess–Zumino–Witten 作用 $S_\Sigma(f)$ に対して，

$$\exp(-S_\Sigma(f))$$

は，上の B および写像の拡張 $\tilde{f}$ のとり方にはよらずに，Riemann 面 Σ と写像 $f:\Sigma\to G$ のみによって決まる．

［証明］　Σ を境界とする向きのついたコンパクト3次元多様体をもうひとつとり，これを B' とおく．また，$\tilde{f}':\Sigma\to G$ を f の B' へのなめらかな写像としての拡張とする．多様体 B' の向きを逆にしたものを $-B'$ とおき，B と B' を境界 Σ ではりあわせて得られる，境界のない向きのついたコンパクト3次元多様体を M とおく．Wess–Zumino–Witten 作用の変化を調べるため，積分

$$\frac{k}{24\pi^2}\left(\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f})-\int_{B'}\mathrm{Tr}(\tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}'\wedge\tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}'\wedge\tilde{f}'^{-1}d\tilde{f}')\right)$$

に注目しよう．写像 $F:M\to G$ を B および B' への制限がそれぞれ，上の $\tilde{f}$ および $\tilde{f}'$ となるものとして定める．この積分は，3次微分形式 σ を用いて

$$k\int_M F^*\sigma$$

と表されるので，σ が $H^3(G,\mathbb{Z})$ の生成元を与えることから，積分の値は整数になる．したがって，$\exp(-S_\Sigma(f))$ は，B および写像の拡張 $\tilde{f}$ のとり方にはよらずに定まることが示された．∎

Wess–Zumino–Witten 作用 $S_\Sigma(f)$ に現れる

$$\frac{\sqrt{-1}\,k}{12\pi}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f}\wedge\tilde{f}^{-1}d\tilde{f})$$

は，**Wess–Zumino 項**とよばれる．後に詳しく説明するように，エネルギーの項に，この Wess–Zumino 項を加えることにより，Riemann 面の局所的な共形変換で不変な場の理論を構成することができる．そのために，重要な役割を果たす **Polyakov–Wiegmann の等式**について説明する．

命題 1.9（Polyakov–Wiegmann の等式）　Riemann 面 Σ から Lie 群 G への2つのなめらかな写像 f, g について，その積 $fg:\Sigma\to G$ を $(fg)(z)=$

$f(z)g(z)$，$z\in\Sigma$ で定める．このとき，

$$\exp(-S_\Sigma(fg)) = \exp\left(-S_\Sigma(f) - S_\Sigma(g) - \frac{\sqrt{-1}\,k}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\overline{\partial} f\wedge \partial g g^{-1})\right)$$

が成立する．

［証明］　証明は単純な計算でなされるので，概略のみを述べる．まず，一般的に，行列に値をとる p 次微分形式 ω と q 次微分形式 η に関して，トレースをとると，

$$\mathrm{Tr}(\omega\wedge\eta) = (-1)^{pq}\,\mathrm{Tr}(\eta\wedge\omega)$$

が成立することに注意しよう．これを用いて，

$$I = \int_\Sigma \mathrm{Tr}((fg)^{-1}\partial(fg)\wedge (fg)^{-1}\overline{\partial}(fg))$$

を計算すると，

$$I_1 = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial f\wedge f^{-1}\overline{\partial} f + g^{-1}\partial g\wedge g^{-1}\overline{\partial} g)$$

$$I_2 = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial f\wedge \overline{\partial} g g^{-1} + \partial g g^{-1}\wedge f^{-1}\overline{\partial} f)$$

を用いて，$I = I_1 + I_2$ と表される．さらに，Wess–Zumino 項について，$df^{-1} = -f^{-1}df f^{-1}$ と，Stokes の定理を用いると，示すべき結果が得られる． ∎

以降，

$$\Gamma_\Sigma(f,g) = -\frac{\sqrt{-1}\,k}{2\pi}\left(\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\overline{\partial} f\wedge \partial g g^{-1})\right)$$

とおくことにする．

Lie 群 $G=SU(2)$ の複素化 $G_{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$ に対して，単位円板

$$D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leqq 1\}$$

からのなめらかな写像 $f_0 : D\to G_{\mathbb{C}}$ を考える．Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ における D の補集合の閉包を D_∞ で表す．つまり，

$$D_\infty = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\geqq 1\}\cup\{\infty\}$$

である．$f_0 : D\to G_{\mathbb{C}}$ をなめらかな写像として Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ 全体に拡張して，これを f とおく．$f:\mathbb{CP}^1\to G_{\mathbb{C}}$ の D_∞ への制限を f_∞ で表す．この f に対して，今までと同様にして

$$\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f))\in\mathbb{C}$$

が定まる．この量が f_0 の $\mathbb{CP}^1$ への拡張のしかたによってどのように変化するかを調べよう．

写像 $f_0:D\to G_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{CP}^1$ 全体へのなめらかな写像としての拡張をもうひとつとり，これを $f':\mathbb{CP}^1\to G_{\mathbb{C}}$ とおく．f' はなめらかな写像 $h:\mathbb{CP}^1\to G_{\mathbb{C}}$ を用いて $f'=fh$ とかける．ここで，$z\in D$ について，$h(z)=e$ が成立している．ただし，e は，Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ の単位元を表す．写像 h の D_∞ への制限を h_∞ で表す．Polyakov–Wiegmann の等式によって

$$\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(fh))=\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f)-S_{\mathbb{CP}^1}(h)+\Gamma_{\mathbb{CP}^1}(f,h))$$

が成立する．さらに，$z\in D$ について，$h(z)=e$ となっているので，

$$\Gamma_{\mathbb{CP}^1}(f,h)=\Gamma_{D_\infty}(f_\infty,h_\infty)$$

となっている．したがって，等式

$$\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(fh))=\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f)-S_{\mathbb{CP}^1}(h)+\Gamma_{D_\infty}(f_\infty,h_\infty)) \tag{1.12}$$

が得られる．

上の考察を用いて，$\exp(-S_D(f_0))$ は，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上のある複素直線束のファイバーの要素とみなして定義するのが自然であることを説明しよう．なめらかな写像 $\varphi:D_\infty\to G_{\mathbb{C}}$ で，$\varphi(\infty)=e$ を満たすもの全体を $\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})$ で表す．極座標を用いて $\dfrac{1}{z}=re^{\sqrt{-1}\theta}$ と表して，$\varphi(z)=p_r(e^{\sqrt{-1}\theta})$ とおくと，

$$p_r:S^1\longrightarrow G_{\mathbb{C}},\quad 0\leqq r\leqq 1$$

は r を固定するごとに，$G_{\mathbb{C}}$ のループを与える．とくに，$r=0$ のときは，S^1 のすべての点を $G_{\mathbb{C}}$ の単位元に写す定数ループとなる．したがって，p_r，$0\leqq r\leqq 1$ はループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ のなめらかな道で p_0 はループ群の単位元となる．このことから，$\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})$ はループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ の単位元を基点とするなめらかな道全体と同一視されることがわかる．

直積

$$\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}$$

に次の同値関係 $\sim$ を導入する．$\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}$ の 2 つの要素 (f_∞,u)，(g_∞,v) について，

$$(f_\infty,u)\sim(g_\infty,v)$$

であるとは，以下の条件(1), (2)が満たされることであるとする．

（1） $f_\infty(z)=g_\infty(z)$, $z\in\partial D$ が成立する．

（2） $g_\infty=f_\infty h_\infty$ と表すとき，

$$v=u\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(h)+\Gamma_{D_\infty}(f_\infty,h_\infty))$$

が成立する．ただし，$h:\mathbb{CP}^1\to G_{\mathbb{C}}$ は，$h_\infty:D_\infty\to G_{\mathbb{C}}$ を D 上つねに単位元 e に値をとる恒等写像として，$\mathbb{CP}^1$ 全体に拡張したものである．

上の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}/\sim$ を $\mathcal{L}$ とかく．埋め込み写像 $\iota:\partial D\to D$ を用いて，射影 $\pi:\mathcal{L}\to LG_{\mathbb{C}}$ を $\pi([f_\infty,u])=f_\infty\circ\iota$ として定める．ここで，$[f_\infty,u]$ は，(f_∞,u) の属する同値類を表す．この射影により $\mathcal{L}$ は，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束の構造をもつことがわかる．上でも述べたように，$\mathrm{Map}_0(D_\infty,G_{\mathbb{C}})$ をループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ の単位元を基点とするなめらかな道全体と同一視すると，条件(1)は，道の端点が一致するということであり，また，条件(2)は，ホロノミーに関する条件である．これは，1.1節における複素直線束の構成と類似の構成である．実際，$\mathcal{L}$ は，複素直線束として，1.1節の $LG_{\mathbb{C}}$ 上の基本複素直線束 L の k 階のテンソル積 $L^{\otimes k}$ と同型であることが示される．次の補題が成立する．

補題 1.10 $\exp(-S_D(f_0))$ は，複素直線束 $\mathcal{L}$ の $f_0\circ\iota$ 上のファイバーの要素として定まる．

［証明］ 写像 $f_0:D\to G_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{CP}^1$ 全体へのなめらかな写像としての拡張をもうひとつとり，これを $f':\mathbb{CP}^1\to G_{\mathbb{C}}$ とおく．$f'=fh$ と表しておく．

$$(f_\infty,\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f)))\sim(f_\infty h_\infty,\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(fh)))$$

を示せば十分であるが，これは，等式(1.12)よりただちに従う．よって，主張が示された． ∎

次に，$\mathcal{L}$ の双対バンドル $\mathcal{L}^{-1}$ を構成する．まず，なめらかな写像 $\varphi:D\to G_{\mathbb{C}}$ で，$\varphi(0)=e$ を満たすもの全体を $\mathrm{Map}_0(D,G_{\mathbb{C}})$ で表す．$\mathrm{Map}_0(D,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}$ に同値関係 $\sim$ を次のように定める．$\mathrm{Map}_0(D,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}$ の要素 (f_0,u), (g_0,v) について，

$$(f_0,u)\sim(g_0,v)$$

であるとは，以下の条件(1), (2)が満たされることであるとする．

（1）　$f_0(z)=g_0(z),\ z\in\partial D$ が成立する．

（2）　$g_0=f_0h_0$ と表すとき，

$$v=u\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(h)+\Gamma_D(f_0,h_0))$$

が成立する．

このとき，$\mathcal{L}^{-1}=\mathrm{Map}_0(D,G_{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}/\sim$ は，射影 $\pi([f_0,u])=f_0\circ\iota$ により，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ 上の複素直線束の構造をもつ．さらに，補題 1.10 の議論と同様にして，$f_\infty:D_\infty\to G_{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\exp(-S_{D_\infty}(f_\infty))=[f_0,\ \exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f))]$$

が，複素直線束 $\mathcal{L}^{-1}$ の $f_\infty\circ\iota$ 上のファイバーの要素として定まる．

複素直線束 $\mathcal{L},\mathcal{L}^{-1}$ のペアリングは次のように与えられる．$f_0\circ\iota=f_\infty\circ\iota=\gamma$ として，ペアリング

$$\mathcal{L}\times\mathcal{L}^{-1}\longrightarrow\mathbb{C}$$

を $\langle[f_\infty,u],[f_0,v]\rangle=uv\exp(S_{\mathbb{CP}^1}(f))$ で定義する．再び，等式(1.12)を用いて，右辺が同値類の代表元の選び方によらずに定まることが示される．また，このペアリングについて

$$\langle\exp(-S_D(f_0)),\ \exp(-S_{D_\infty}(f_\infty))\rangle=\exp(-S_{\mathbb{CP}^1}(f))$$

が成立することもただちに確かめられる．

ここで構成した複素直線束 $\pi:\mathcal{L}\to LG_{\mathbb{C}}$ とループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ の中心拡大との関係について説明する．写像 $s:LG_{\mathbb{C}}\to\mathcal{L}$ で，$s(\gamma)=0\in\mathcal{L}_\gamma$ を満たすものをゼロセクションとよび，複素直線束 $\mathcal{L}$ から $LG_{\mathbb{C}}$ のゼロセクションによる像 $s(LG_{\mathbb{C}})$ をのぞいた集合を $\widehat{LG_{\mathbb{C}}}$ で表す．単位円板 D から $G_{\mathbb{C}}$ へのなめらかな写像 g に対して，境界のパラメータ付け $\iota:\partial D\to D$ を用いて，$\gamma=g\circ\iota$ とおくと，上の構成を用いて

$$\exp(-S_D(g))\in\mathcal{L}_\gamma$$

が定義される．また，複素直線束 $\mathcal{L}$ のファイバーの任意の点は，適当な $g:D\to G_{\mathbb{C}}$ を用いて $z\exp(-S_D(g)),\ z\in\mathbb{C}$ の形に表される．$g_i:D\to G_{\mathbb{C}},\ i=1,2$ に対して，$\gamma_i=g_i\circ\iota$ とおき，$\exp(-S_D(g_i))\in\mathcal{L}_{\gamma_i}$ について，これらの積を

$$\exp(-S_D(g_1))\bullet\exp(-S_D(g_2))=\exp(-S_D(g_1g_2)-\Gamma_D(g_1,g_2))\tag{1.13}$$

で定義する．これを，複素線形写像として拡張することによって，積

$$\mathcal{L}_{\gamma_1} \times \mathcal{L}_{\gamma_2} \longrightarrow \mathcal{L}_{\gamma_1\gamma_2}$$

が定まり，$\widehat{LG_{\mathbb{C}}}$ に積構造を導入することができる．これは，g_1, g_2 の選び方によらず定義され，この積によって，$\widehat{LG_{\mathbb{C}}}$ は群の構造をもつことが確かめられる．さらに，$e: D \to G_{\mathbb{C}}$ をすべての D の要素に対して $G_{\mathbb{C}}$ の単位元を対応させる写像として，$i: \mathbb{C}^* \to \widehat{LG_{\mathbb{C}}}$ を $i(z) = z\exp(-S_D(e))$ で定義すると群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{i} \widehat{LG_{\mathbb{C}}} \xrightarrow{\pi} LG_{\mathbb{C}} \longrightarrow 1$$

が得られる．これは，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ の中心拡大を与える．

Σ をいくつかの S^1 の和集合と同相な境界をもつコンパクト Riemann 面とする．Σ には複素構造が与えられているとする．境界のパラメータ付け $p_i: S^1 \to \partial\Sigma$, $1 \leqq i \leqq m$ を固定する．$\partial\Sigma = \bigcup_{i=1}^{m} p_i(S^1)$ であり，境界につけられた向きは，Riemann 面 Σ の向きから導かれたものであるとする．図 1.1 のように，Σ の境界 $p_i(S^1)$ に単位円板 D_i, $1 \leqq i \leqq m$ の境界をそれぞれはりあわせて得られる境界のないコンパクト Riemann 面を $\tilde{\Sigma}$ とおく．

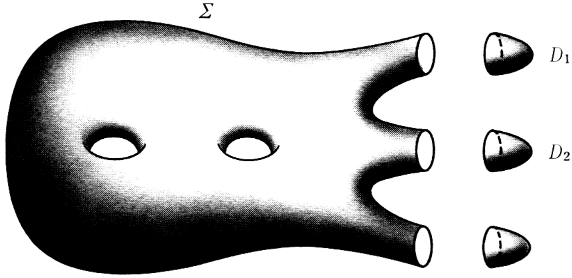


図 1.1 Σ の境界に円板 $D_1, D_2, \cdots$ をはりあわせる．

なめらかな写像 $g: \Sigma \to G_{\mathbb{C}}$ について，$\exp(-S_\Sigma(g))$ を定義しよう．写像 g をなめらかな写像として $\tilde{\Sigma}$ に拡張し，これを $\tilde{g}: \tilde{\Sigma} \to G_{\mathbb{C}}$ とかく．また，$\tilde{g}$ の D_i への制限を g_i で表す．上の D_∞ に関する複素直線束 $\mathcal{L}^{-1}$ の構成をそれぞれの単位円板 D_i に対して適用して，$\exp(-S_{D_i}(g_i))$ がファイバー $\mathcal{L}^{-1}_{g \circ p_i}$ の要素として定まる．これを用いて，$\exp(-S_\Sigma(g))$ を

$$\left\langle \exp(-S_{\Sigma}(g)), \bigotimes_{i=1}^{m} \exp(-S_{D_i}(g_i)) \right\rangle = \exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{g}))$$

を満たす $\bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_{g\circ p_i}$ の要素として定義する．ここでも，Polyakov–Wiegmann の等式を用いることにより，これが，g の拡張 $\tilde{g}$ の選び方によらずに，g と Σ のみによって定まることが確かめられる．

このようにして，なめらかな写像 $g:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ について，$\exp(-S_{\Sigma}(g))$ が複素直線束 $\mathcal{L}$ のファイバーのテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{L}_{g\circ p_i}$ の要素として定義された．以降，簡単のため $m=1$ の場合を扱おう．境界のパラメータ付けを $p:S^1\to\partial\Sigma$ で表す．なめらかな写像 $f:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ に対して，f の $\mathcal{L}$ への左作用 $l(f)$ を式(1.13)で定義した積を用いて

$$l(f)\exp(-S_{\Sigma}(g)) = \exp(-S_{\Sigma}(f))\bullet\exp(-S_{\Sigma}(g))$$

で定める．ここで，Polyakov–Wiegmann の等式から，

$$\exp(-S_{\Sigma}(f))\bullet\exp(-S_{\Sigma}(g)) = \exp(-S_{\Sigma}(fg)-\Gamma_{\Sigma}(f,g)) \tag{1.14}$$

と表されることがわかる．同様にして，f の $\mathcal{L}$ への右作用 $r(f)$ を

$$r(f)\exp(-S_{\Sigma}(g)) = \exp(-S_{\Sigma}(g))\bullet\exp(-S_{\Sigma}(f))$$

で定める．なめらかな写像 $f:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ 全体を $\mathrm{Map}(\Sigma, G_{\mathbb{C}})$ で表す．これは，Σ 上の自明な $G_{\mathbb{C}}$ 束の**ゲージ群**(gauge group)である．境界への制限

$$p^*:\mathrm{Map}(\Sigma, G_{\mathbb{C}}) \longrightarrow LG_{\mathbb{C}}$$

により，ゲージ群 $\mathrm{Map}(\Sigma, G_{\mathbb{C}})$ は，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ に，左右から作用する．さらに，上の左作用および右作用によって，ゲージ群 $\mathrm{Map}(\Sigma, G_{\mathbb{C}})$ の $LG_{\mathbb{C}}$ への作用は，複素直線束 $\mathcal{L}$ への作用に持ち上げられることがわかる．

正則写像 $h:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ に対して決まる左作用 $l(h)$ および，反正則写像 $\overline{h}$ に対して決まる右作用 $r(\overline{h})$ は，次の意味で共変的にふるまう．

命題 1.11　正則写像 $h:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ について

$$l(h)\exp(-S_{\Sigma}(g)) = \exp(-S_{\Sigma}(hg))$$

が成立する．また，反正則写像 $\overline{h}:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ について

$$r(\overline{h})\exp(-S_{\Sigma}(g)) = \exp(-S_{\Sigma}(g\overline{h}))$$

が成立する．

［証明］　正則写像 h について $\overline{\partial}h=0$ となることから，

$$\Gamma_{\Sigma}(h,g) = -\frac{\sqrt{-1}\,k}{2\pi}\left(\int_{\Sigma} \mathrm{Tr}(h^{-1}\overline{\partial}h \wedge \partial g g^{-1})\right) = 0$$

が成立することがわかる．これと，(1.14)の形の Polyakov–Wiegmann の等式をあわせて，求める結果が得られる．反正則写像 $\overline{h}$ の右作用についても $\partial\overline{h}=0$ を用いて同様に示される． ∎

Wess–Zumino–Witten 模型の本来の目的は，境界のないコンパクトな Riemann 面 $\tilde{\Sigma}$ について，すべてのなめらかな写像 $f:\tilde{\Sigma}\to G_{\mathbb{C}}$ に関して，$\exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(f))$ の平均をとり，Riemann 面 $\tilde{\Sigma}$ の不変量を得るというものである．これは，形式的には，Feynman 経路積分

$$\int_{f:\tilde{\Sigma}\to G_{\mathbb{C}}} \exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(f))\mathcal{D}f$$

で表されるが，このような無限次元の空間における積分は，数学的には，確立された概念ではない．Σ が S^1 に同相な境界をもつ Riemann 面のとき，ループ群 $LG_{\mathbb{C}}$ の要素 γ を固定し，$f:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ で境界に制限して γ に一致するもの全体で，上の経路積分を実行すると，複素直線束 $\mathcal{L}$ のセクションが定義されることが期待される．ここでは，経路積分から示唆される性質を用いて，このようなセクションを厳密に構成することを目標とする．複素直線束 $\mathcal{L}$ のセクションの空間には，アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が，左右から作用し，レベル k の最高ウエイト加群

$$\bigoplus_{0\leqq\lambda\leqq k} \mathcal{H}_{\lambda}\otimes\mathcal{H}_{\lambda}^{*}$$

が含まれることが知られている．左加群の方に注目すると，得られるセクションは，命題 1.11 から正則写像 $h:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ の作用で不変であることが期待される．$\mathcal{H}_{\lambda}$ の要素で正則写像 $h:\Sigma\to G_{\mathbb{C}}$ の作用で不変なもの全体に注目する．これが基本的には次節で構成する共形ブロックの空間である．

§1.4 共形ブロックの空間とフュージョン則

Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ の斉次座標を $[\zeta_0:\zeta_1]$ とし，$\mathbb{CP}^1$ から無限遠点 ∞ をの

ぞいた複素平面 $\mathbb{C}$ の座標関数を $z=\zeta_0/\zeta_1$ で表す．$\mathbb{CP}^1$ 上に相異なる n 個の点 $p_1,\cdots,p_n$ をとり，これらの座標 $z(p_j)$, $1\leqq j\leqq n$ を z_j とかく．点 p_j が無限遠点でないとき，$t_j=z-z_j$ とおく．また，点 p_j が無限遠点のときは，$t_j=1/z$ とおく．t_j は，$t_j(p_j)=0$ を満たす点 p_j のまわりの局所座標を与える．以降，p_j, $1\leqq j\leqq n$ は，いずれも無限遠点ではないとして，$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ とおく．

$\mathbb{CP}^1$ 上の有理型関数で，高々 $p_1,\cdots,p_n$ のみに極をもつもの全体を $\mathcal{M}_{\boldsymbol{p}}$ とかく．$\mathfrak{g}$ を Lie 環 $sl_2(\mathbb{C})$ として，$\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})=\mathfrak{g}\otimes\mathcal{M}_{\boldsymbol{p}}$ とおく．$\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ は，Lie ブラケットを

$$[X\otimes f, Y\otimes g]=[X,Y]\otimes fg,\quad X,Y\in\mathfrak{g},\quad f,g\in\mathcal{M}_{\boldsymbol{p}}$$

で定めることにより，Lie 環の構造をもつ．

Lie 環 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の要素 f に対して，これを点 p_j のまわりで，局所座標 t_j についてLaurent 展開したものを $f_{p_j}(t_j)\in\mathbb{C}((t_j))$ で表す．これにより，線形写像 $\tau_j:\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})\to\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((t_j))$ が得られる．さらに，$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((t_j))$ からアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_j=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((t_j))\oplus\mathbb{C}c$ への埋め込み写像を合成することによって得られる線形写像を

$$\iota_j:\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})\longrightarrow\widehat{\mathfrak{g}}_j$$

とかく．また，これらの直和によって得られる写像を $\iota:\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})\to\bigoplus_{j=1}^{n}\widehat{\mathfrak{g}}_j$ とかく．

補題 1.12　上で定義した $\iota:\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})\to\bigoplus_{j=1}^{n}\widehat{\mathfrak{g}}_j$ は単射で，Lie 環の準同型写像である．

［証明］　単射性は，解析接続の一意性からただちに従う．また，ι が Lie 環の準同型写像であることは，命題 1.1 で説明したアフィン Lie 環の中心拡大を記述する 2–コサイクルの形と，$\mathbb{CP}^1$ 上の有理型 1 次微分形式の留数の和が 0 であることから示される．∎

正の整数 k を固定して，各点 p_j, $1\leqq j\leqq n$ に，アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_j$ のレベル k の最高ウエイト既約表現 $\mathcal{H}_{\lambda_j}$ を対応させる．最高ウエイトの組 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を $\boldsymbol{\lambda}$ とかく．

多重線形写像

$$\Psi : \mathcal{H}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{H}_{\lambda_n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

で，$\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の作用で不変なもの全体を $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ とかき，これを**共形ブロックの空間**(space of conformal blocks)とよぶ．ここで，Ψ が $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の作用について不変であるとは，すべての $X \otimes f \in \mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ と $\xi_1 \in \mathcal{H}_{\lambda_1}$，…，$\xi_n \in \mathcal{H}_{\lambda_n}$ について

$$\sum_{j=1}^{n} \Psi(\xi_1, \cdots, (X \otimes f_{p_j})\xi_j, \cdots, \xi_n) = 0$$

が成立することである．上の式で f_{p_j} は，有理型関数 f の点 p_j のまわりでの t_j に関する Laurent 級数で，ξ_j への作用は，補題 1.12 の埋め込み写像 ι によって定義されている．共形ブロックの空間の定義は，次のように述べ直すこともできる．Lie 環 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ は，ι を経由して，テンソル積 $\mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_n}$ に

$$(X \otimes f)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi_1 \otimes \cdots \otimes ((X \otimes f_{p_j})\xi_j) \otimes \cdots \otimes \xi_n$$

によって作用する．これにより，$\mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_n}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の表現空間とみなすと，共形ブロックの空間は

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_{\lambda_j}, \mathbb{C}\right)$$

と表すことができる．ここで，$\mathbb{C}$ は自明な $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ 加群，つまり，すべての $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の要素が 0 として作用する表現空間とみなしている．

$\mathbb{CP}^1$ 上の有理型関数

$$f(z) = (z - z_i)^r, \quad r < 0$$

を考える．f は p_i のみに極をもち，座標関数 t_i を用いると，$f = t_i^r$ とも表される．点 p_j, $j \neq i$ のまわりで，f を Taylor 展開して，これを

$$f_{p_j}(t_j) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(j)} t_j^m$$

で表す．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の要素 X について，共形ブロックの要素 Ψ は $X \otimes f$ の作用で不変であることから，$\xi_j \in \mathcal{H}_{\lambda_j}$，$1 \leqq j \leqq n$ について，

(1.15)

$$\Psi(\xi_1,\cdots,(X\otimes t_i^r)\xi_i,\cdots,\xi_n)=-\sum_{j,\,j\neq i}\sum_{m\geqq 0}a_m^{(j)}\Psi(\xi_1,\cdots,(X\otimes t_j^m)\xi_j,\cdots,\xi_n)$$

が成立することがわかる．この式を，以下の議論でしばしば用いる．

共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ は，有限次元の不変テンソルの空間に自然に埋め込めることを示そう．V_{λ_j} を最高ウエイト λ_j の $\mathfrak{g}$ の既約表現とする．V_{λ_j} は有限次元の線形空間で $\mathcal{H}_{\lambda_j}$ の部分空間とみなすことができる．自然な埋め込み写像を

$$i:\bigotimes_{j=1}^n V_{\lambda_j}\longrightarrow\bigotimes_{j=1}^n\mathcal{H}_{\lambda_j}$$

で表し，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ の要素 Ψ の $\bigotimes_{j=1}^n V_{\lambda_j}$ への制限 $i^*\Psi=\Psi\circ i$ を Ψ_0 とかく．このとき，次が成立する．

補題 1.13　制限写像 i^* は，単射

$$i^*:\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{j=1}^n V_{\lambda_j},\mathbb{C}\right)$$

を与える．つまり，共形ブロックの要素 $\Psi:\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_n}\to\mathbb{C}$ は，$V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$ への制限によって一意的に決まる．

［証明］　まず，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ の要素 Ψ について，

$$i^*\Psi:\bigotimes_{j=1}^n V_{\lambda_j}\longrightarrow\mathbb{C}$$

は，$\mathfrak{g}$ の作用について不変であること，つまり，$X\in\mathfrak{g}$, $\xi_j\in V_{\lambda_j}$, $1\leqq j\leqq n$ について

$$\sum_{j=1}^n\Psi(\xi_1\otimes\cdots\otimes X\xi_j\otimes\cdots\otimes\xi_n)=0$$

が成立することを説明する．これは，Ψ が，$\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の作用で不変なので，とくに，$\mathbb{CP}^1$ 上恒等的に 1 となる関数を $1_{\mathbb{CP}^1}$ とかいて，$X\otimes 1_{\mathbb{CP}^1}$ の作用による不変性を用いて，ただちに示される．

次に，i^* の単射性を示す．式(1.11)で構成した直和分解 $\mathcal{H}_{\lambda_j}=\bigoplus_{d\geqq 0}\mathcal{H}_{\lambda_j,d}$ を

使って，

$$\mathcal{F}_d = \bigoplus_{d_1+\cdots+d_n \leqq d} \left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{H}_{\lambda_j, d_j} \right)$$

とおく．とくに，$\mathcal{F}_0 = \bigotimes_{j=1}^{n} V_{\lambda_j}$ となっている．単射性の証明のため，共形ブロックの要素 Ψ が $\mathcal{F}_0$ 上 0 であるとき，すべての d について，Ψ の $\mathcal{F}_d$ への制限が 0 となることを d についての帰納法で証明する．$\mathcal{F}_d$ の要素 ξ で

$$\xi = \eta_1 \otimes \cdots \otimes (X \otimes t_i^r)\eta_i \otimes \cdots \otimes \eta_n,$$
$$X \in \mathfrak{g}, \quad r<0, \quad \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n \in \mathcal{F}_{d-1}$$

と表されるものについて，$\Psi(\xi)=0$ を示せば十分である．式(1.15)を用いると，これは帰納法の仮定よりただちに従う．以上で主張が証明された．∎

上の補題から，とくに，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ は有限次元複素線形空間であることがわかる．次に，制限写像 i^* の像について議論しよう．レベル k の最高ウエイト既約表現 $\mathcal{H}_\lambda$ は，Verma 加群をヌルベクトル χ で生成する部分加群でわったものであった．1.2 節で説明したように，χ は，$d=k-\lambda+1$ と最高ウエイトベクトル $v \in V_\lambda$ を用いて，$\chi = (E \otimes t^{-1})^d v$ と表される．このようなヌルベクトルが存在することから，$\Psi \in \mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ について，$\Psi_0 : V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n} \to \mathbb{C}$ は，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の作用で不変であることに加えて，いくつかの代数的な条件を満たすことを説明する．具体的には，Ψ_0 は次のような関係式を満たす．

命題 1.14　レベル k の最高ウエイト既約表現 $\mathcal{H}_{\lambda_i}$, $1 \leqq i \leqq n$ の最高ウエイトベクトルを v_i，ヌルベクトルを $\chi_i = (E \otimes t_i^{-1})^{d_i} v_i$ とする．共形ブロック $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ の要素 Ψ について，$\Psi_0 : V_{\lambda_1} \times \cdots \times V_{\lambda_n} \to \mathbb{C}$ は，多重線形写像として，

$$(1.16) \qquad \Psi_0(E^{m_1}\xi_1, \cdots, E^{m_{i-1}}\xi_{i-1}, v_i, E^{m_{i+1}}\xi_{i+1}, \cdots, E^{m_n}\xi_n) = 0$$

を満たす．ここで，上の等式は，$\mathfrak{g}$ の既約表現 V_{λ_j} の任意の要素 ξ_j, $j \neq i$, $1 \leqq j \leqq n$ と，$\sum_{j, j \neq i} m_j = d_i$ を満たす 0 以上の整数の組 m_j, $j \neq i$, $1 \leqq j \leqq n$ すべてに対して成立する．

［証明］ $i=1$ の場合に示しておけば十分である．$\chi_1 = (E \otimes t_1^{-1})^{d_1} v_1$ がヌルベクトルであることから，

$$\Psi((E\otimes t_1^{-1})^{d_1}v_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=0$$

が成立する．この式の左辺に対して，式(1.15)をくりかえし適用し，さらに，$V_{\lambda_1}\times\cdots\times V_{\lambda_n}$ に制限すると，

$$\sum_{m_2+\cdots+m_n=d_1}\frac{d_1!}{m_2!\cdots m_n!}\prod_{2\leqq j\leqq n}(z_j-z_1)^{-m_j}\Psi_0(v_1,E^{m_2}\xi_2,\cdots,E^{m_n}\xi_n)=0$$

が得られる．さらに，$z_1,\cdots,z_n$ を変数と考えて，この式の $\prod_{2\leqq j\leqq n}(z_j-z_1)^{-m_j}$ の係数を見ることにより，求める結果が示される． ∎

ここまでの議論は，一般の複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ についても，ほぼ同様に展開することができるが，以下，とくに，$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ のときに，ここで求めた代数関係式をもう少し詳しく調べてみよう．$n=3$ の場合について考察する．共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}(p_1,p_2,p_3;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の複素ベクトル空間としての次元を $N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ で表す．このとき次が成立する．

命題 1.15　点 p_1,p_2,p_3 に対応するレベル k の最高ウエイト $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ が条件

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\in 2\mathbb{Z}$$
$$|\lambda_1-\lambda_2|\leqq\lambda_3\leqq\lambda_1+\lambda_2$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\leqq 2k$$

を満たすときに限り，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(p_1,p_2,p_3;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の次元 $N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ は 1 で，それ以外の場合は，$N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=0$ となる．

［証明］　まず，命題 1.4 で説明したように，$sl_2(\mathbb{C})$ の表現論によって，

$$\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}$$

となるための必要十分条件は

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\in 2\mathbb{Z}$$
$$|\lambda_1-\lambda_2|\leqq\lambda_3\leqq\lambda_1+\lambda_2$$

が満たされることであることが知られていて，これは，Clebsch–Gordan 条件とよばれている．Clebsch–Gordan 条件が満たされないときは，$\mathrm{Hom}_{sl_2(\mathbb{C})}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3},\mathbb{C})=0$ となる．共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(p_1,p_2,p_3;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ が 0 にならないためには，Clebsch–Gordan 条件に加えて，レベル k からくる制約

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leqq 2k$$

が必要であることを示す．1.2 節と同様に，$sl_2(\mathbb{C})$ の基底として H, E, F をとる．条件は，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に関して対称なので，命題 1.14 の関係式の $i=1$ の場合を用いて，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(p_1, p_2, p_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の要素 Ψ について

$$\Psi_0(v_1, E^{m_2}\xi_2, E^{m_3}\xi_3)=0, \quad m_2+m_3=d_1 \tag{1.17}$$

が成立する．ここで，v_1 は V_{λ_1} の最高ウエイトベクトル，ξ_2, ξ_3 はそれぞれ，$V_{\lambda_2}, V_{\lambda_3}$ の任意の要素であり，また，d_1 は k と λ_1 を用いて $d_1=k-\lambda_1+1$ と表される．ξ_2, ξ_3 は，H の作用についての固有ベクトルであるとして一般性は失われないので，そのように仮定して，ξ_2, ξ_3 の固有値をそれぞれ，α_2, α_3 とおく．これらは $-\lambda_2 \leqq \alpha_2 \leqq \lambda_2$，$-\lambda_3 \leqq \alpha_3 \leqq \lambda_3$ を満たし，適当な非負整数 n_2, n_3 を用いて，$\alpha_2=-\lambda_2+2n_2$，$\alpha_3=-\lambda_3+2n_3$ と表すことができる．このとき，

$$\begin{aligned}&H(v_1\otimes E^{m_2}\xi_2\otimes E^{m_3}\xi_3)\\&\quad=(2(k+1)-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+2(n_2+n_3))v_1\otimes E^{m_2}\xi_2\otimes E^{m_3}\xi_3\end{aligned}$$

が成立する．したがって，$2(k+1)-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+2(n_2+n_3)\neq 0$ であれば，(1.17)は，Ψ_0 が $sl_2(\mathbb{C})$ の作用で不変であることから自動的に満たされることがわかる．$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leqq 2k$ であれば，上の不等号はつねに成立するので，この場合は，Clebsch–Gordan 条件が，$N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\neq 0$ となるための必要十分条件となっている．また，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3>2k$ のときは，条件(1.17)は，$sl_2(\mathbb{C})$ の作用による不変性とは独立の条件を与え，$N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=0$ となることが示される．以上により証明された． ∎

ここで求めた $N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\neq 0$ となるための条件を，レベル k の Clebsch–Gordan 条件とよぶ．また，一般に，各点に対応する最高ウエイトから，共形ブロックの空間の次元を得る規則は，**フュージョン則**(fusion rule)とよばれる．

次のように，無限遠点にも最高ウエイトを与えた共形ブロックの空間も，次節以降で，しばしば用いる．Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ 上に相異なる $n+1$ 個の点 $p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$ をとり，p_{n+1} は無限遠点であるとする．$p_1, \cdots, p_{n+1}$ に，それぞれ，レベル k の最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ を与え，$\boldsymbol{p}=(p_1, \cdots, p_{n+1})$ とおく．

共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p};\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}^*)$ を，

$$\text{(1.18)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{H}_{\lambda_j}\right)\otimes\mathcal{H}_{\lambda_{n+1}}^*,\ \mathbb{C}\right)$$

として定義する．有理型関数の空間 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{p})$ の，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{H}_{\lambda_j}\right)\otimes\mathcal{H}_{\lambda_{n+1}}^*,\ \mathbb{C}\right)$ への作用は，これまでの定義と同様に，各点における Laurent 展開を用いて与えられる．ただし，$\mathcal{H}_{\lambda_{n+1}}^*$ は，1.2 節で定義した意味の双対加群である．補題 1.13 の証明の議論を再び用いると，この共形ブロックの空間は，不変テンソルの空間

$$\text{(1.19)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{n}V_{\lambda_j}\right)\otimes V_{\lambda_{n+1}}^*,\ \mathbb{C}\right)$$

に自然に埋め込むことができる．共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p};\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}^*)$ の複素ベクトル空間としての次元を $N_{\lambda_1\cdots\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}$ で表す．

まず，$n=1$ の場合，

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}^*,\mathbb{C})$$

は，$\lambda_1=\lambda_2$ の場合に $\mathbb{C}$ と同型で，そうでない場合は，0 になる．共形ブロックの空間の次元についても，$\lambda_1=\lambda_2$ の場合に $N_{\lambda_1}^{\lambda_2}=1$ で，それ以外の場合は，0 になることが確かめられる．$n=2$ のとき，$N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}=1$ となるための必要十分条件は，レベル k の Clebsch–Gordan 条件であり，これが満たされないときは，$N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}=0$ となる．一般の複素単純 Lie 環で定式化すると，双対表現に対応する最高ウエイトを $*$ をつけて表して，$N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}=N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3^*}$ となるが，$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の場合には，任意の有限次元既約表現はその双対表現と同型になり，$N_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}=N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ が成立していることに注意しよう．$n=2$ のときの共形ブロックの空間 (1.18)は，不変テンソルの空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2},V_{\lambda_3})$$

に埋め込むことができるので，テンソル表現 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ の既約分解に関する射影 $p_{\lambda_3}^{\lambda_1\lambda_2}:V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\to V_{\lambda_3}$ に対応した，共形ブロックの空間の基底をとることができる．この基底を，図 1.2 の左のグラフで表すことにする．

一般に，上の共形ブロックの空間の基底を，各辺にレベル k の最高ウエ

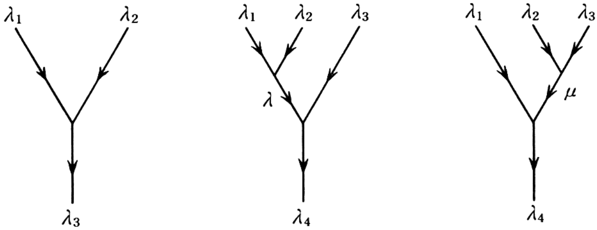


図 1.2 左は，$n=2$ の場合，中央と右は $n=3$ の場合の共形ブロックの空間の基底を表す.

イトを対応させた，各頂点のまわりに 3 本の辺が集まる可縮なグラフで表すことができる．その際，外側の $n+1$ 本の辺に対応した最高ウエイトは，$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ であり，各頂点に集まる 3 つの辺に与えられたウエイトが，レベル k の Clebsch–Gordan 条件を満たすものを考える．図 1.2 の中央のグラフは，射影

$$p_{\lambda}^{\lambda_1\lambda_2} \otimes 1_{V_{\lambda_3}} : (V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}) \otimes V_{\lambda_3} \longrightarrow V_{\lambda} \otimes V_{\lambda_3}$$

と

$$p_{\lambda_4}^{\lambda\lambda_3} : V_{\lambda} \otimes V_{\lambda_3} \longrightarrow V_{\lambda_4}$$

の合成に対応している．命題 1.15 の証明の議論を用いると，共形ブロックの空間の基底は，グラフの各辺に，上の条件を満たすように，最高ウエイトを与える方法と一対一に対応していることがわかる．図 1.2 の中央のグラフの場合には，共形ブロックの次元は，上の条件を満たすような λ の個数に等しく，図 1.2 の中央と右のグラフは，それぞれ，別の基底の与え方に対応している．このような，グラフによる共形ブロックの空間の基底の記述に関しては，次の章であらためて詳しく扱う.

これまでの議論では，k を正の整数として，レベル k の最高ウエイト表現 $\mathcal{H}_{\lambda}$ を用いて，共形ブロックの空間を構成してきたため，ヌルベクトルの存在に由来する，代数関係式(1.16)が得られた．k を一般にとって，Verma 加群を用いて同様な構成を行うと，このような制約はなく，$N_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \neq 0$ となる条件も，通常の Clebsch–Gordan 条件になる.

§1.5 KZ方程式

Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ 上の相異なる n 個の点の**配置の空間**(configuration space)を $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ とかく．つまり，

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1) = \{(p_1, \cdots, p_n) \in (\mathbb{CP}^1)^n \mid i \neq j \text{ ならば } p_i \neq p_j\}$$

である．ここで，$(\mathbb{CP}^1)^n$ は，$\mathbb{CP}^1$ の n 個の直積を表す．前節で $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ とレベル k の最高ウエイトの組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ を定義した．ここでは，$(p_1, \cdots, p_n)$ を動かして，

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\lambda}} = \bigcup_{\boldsymbol{p} \in \mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)} \mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$$

を $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上のベクトル束とみなし，このベクトル束に，自然な接続を導入し，その曲率が0であることを示す．

$\mathbb{CP}^1$ の $n+1$ 個の直積 $(\mathbb{CP}^1)^{n+1}$ をとり，

$$\pi : (\mathbb{CP}^1)^{n+1} \longrightarrow (\mathbb{CP}^1)^n$$

を，はじめの n 個の成分への射影とする．$(\mathbb{CP}^1)^{n+1}$ の座標関数を $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1})$ で表す．また，$z_{n+1} - z_j = 0,\ 1 \leqq j \leqq n$ で定義される $(\mathbb{CP}^1)^{n+1}$ の超平面を D_j とかく．さらに，$t_j = z_{n+1} - z_j$ とおく．

$\mathbb{CP}^1$ 上に相異なる n 個の点 $p_1, \cdots, p_n$ をとり，これらの座標をそれぞれ，$z_1, \cdots, z_n$ とする．$\pi^{-1}(p_1, \cdots, p_n) = \mathbb{CP}^1$ と D_j，$1 \leqq j \leqq n$ との交点の座標関数 z_{n+1} に関する座標は，それぞれ，$z_1, \cdots, z_n$ になっている．つまり，射影 π を，点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ に制限すると，これは，上の $D_j,\ 1 \leqq j \leqq n$ に対応して，n 個のセクション $s_j,\ 1 \leqq j \leqq n$ を定める．つまり，$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上の各点 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ に対して，n 個の相異なる点 $p_1, \cdots, p_n$ がのった $\mathbb{CP}^1$ を対応させる族が構成されたことになる．

まず，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{H}_{\lambda_j}, \mathbb{C}\right)$ をファイバーとする $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上の自明なベクトル束から出発して，その部分ベクトル束として，共形ブロックの空間をファイバーとする部分ベクトル束 $\mathcal{E}_{\lambda}$ を構成する．

直積 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{H}_{\lambda_j}, \mathbb{C}\right)$ の要素 $(\boldsymbol{p}, \Psi)$ が，$\mathcal{E}_{\lambda}$ に属すること

をΨが，前節の意味で，共形ブロックの空間の要素であることとして定義する．$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ の開集合Uに対して，$\mathcal{E}_\lambda$ のU上のセクションの空間 $\Gamma(U,\mathcal{E}_\lambda)$ は，次のように記述される．点$\boldsymbol{p}\in U$ にパラメータ付けられた多重線形写像の族

$$\Psi(\boldsymbol{p}):\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_n}\longrightarrow\mathbb{C}$$

をとる．以降，$\boldsymbol{p}$ の座標を $(z_1,\cdots,z_n)$ として，$\Psi(\boldsymbol{p})$ は，$z_1,\cdots,z_n$ について微分可能であるとする．f を $\pi^{-1}(U)$ 上の，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる有理型関数で，高々 $D_1,\cdots,D_n$ に極をもつものとする．有理型関数 f の D_j，$1\leqq j\leqq n$ にそった Laurent 展開を

$$f_{D_j}(t_j)=\sum_{m=-N}^{\infty}a_m(z_1,\cdots,z_n)t_j^m$$

で表す．上の $f_{D_j}(t_j)$ は，$z_1,\cdots,z_n$ についての正則関数を係数とする t_j についての Laurent 級数とみなしている．前節の共形ブロックの定義と同様に，$(z_1,\cdots,z_n)$ を固定するごとに，f_{D_j} をアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_j=[\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}((t_j))]\oplus\mathbb{C}c$ の要素とみなす．これにより，Laurent 級数 $f_{D_j}(t_j)$ の $\widehat{\mathfrak{g}}_j$ の表現空間 $\mathcal{H}_{\lambda_j}$ への作用を定めることができる．Ψ が，開集合 U 上の $\mathcal{E}_\lambda$ のセクションであるとは，$\pi^{-1}(U)$ 上の，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる有理型関数で，高々 $D_1,\cdots,D_n$ に極をもつような任意の f と $\xi_j\in\mathcal{H}_{\lambda_j}$，$1\leqq j\leqq n$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{n}[\Psi(\boldsymbol{p})](\xi_1,\cdots,f_{D_j}\xi_j,\cdots,\xi_n)=0$$

が，すべての $\boldsymbol{p}\in U$ に対して成立することである．とくに，$\boldsymbol{p}$ を固定するごとに，$\Psi(\boldsymbol{p})$ は，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ の要素になっている．$\mathcal{E}_\lambda$ は，自然に $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上のベクトル束の構造をもつことがわかり，これを共形ブロック束とよぶ．

以降，1.2 節の(1.9)で，菅原作用素によって導入した Virasoro 作用素 L_{-1} を用いて，$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ の部分集合

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n\mid i\neq j \text{ ならば } z_i\neq z_j\}$$

上で，ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ に入る平坦接続を記述する．アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ あるいはその包絡環の要素 X について，多重線形写像 $X^{(j)}\Psi:\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_n}\to\mathbb{C}$

を

$$[X^{(j)}\Psi](\xi_1,\cdots,\xi_n)=\Psi(\xi_1,\cdots,X\xi_j,\cdots,\xi_n),\quad \xi_1\in\mathcal{H}_{\lambda_1},\ \cdots,\ \xi_n\in\mathcal{H}_{\lambda_n}$$

で定める．ここで，X は j 番目の成分のみに作用している．この記法を用いて，次の命題が示される．

命題 1.16　ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ の $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上のセクション Ψ に対して

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z_j}-L_{-1}^{(j)}\Psi$$

は，やはり $\mathcal{E}_\lambda$ のセクションである．

［証明］　$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ の開集合 U に対して $\pi^{-1}(U)$ 上の，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる有理型関数 f で，高々 $D_1,\cdots,D_n$ に極をもつものをとり，f の D_j，$1\leqq j\leqq n$ にそった Laurent 展開を

$$f_{D_j}(t_j)=\sum_{m=-N}^{\infty}a_m(z_1,\cdots,z_n)t_j^m$$

で表す．偏導関数 $g=\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ の D_j にそった Laurent 展開は，$t_j=z_{n+1}-z_j$ であることから，

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=\sum_{m=-N}^{\infty}\left(\frac{\partial a_m}{\partial z_j}t_j^m-a_mmt_j^{m-1}\right)$$

と表される．この式の右辺を，$z_1,\cdots,z_n$ に関する正則関数を係数とする t_j についての Laurent 級数とみて $g_{D_j}(t_j)$ とおくと，

$$g_{D_j}(t_j)=\frac{\partial}{\partial z_j}f_{D_j}(t_j)-\frac{\partial}{\partial t_j}f_{D_j}(t_j)$$

ともかける．さらに，命題 1.6 より，

$$\frac{\partial}{\partial t_j}f_{D_j}=-[L_{-1},f_{D_j}]$$

となるので，

$$g_{D_j}=\frac{\partial}{\partial z_j}f_{D_j}+[L_{-1},f_{D_j}] \tag{1.20}$$

が成り立つことがわかる．

多重線形写像 $\Psi(\boldsymbol{p}):\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_n}\to\mathbb{C}$ を，単に Ψ とかいて，

$$(1.21)\qquad \frac{\partial}{\partial z_j}[\Psi(\xi_1,\cdots,f_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n)] = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z_j}\right)(\xi_1,\cdots,f_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n)+\Psi\left(\xi_1,\cdots,\frac{\partial}{\partial z_j}f_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n\right)$$

が得られる．この式と(1.20)をあわせて，Ψ が共形ブロックの要素であることから

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z_j}-L_{-1}^{(j)}\Psi\right)(\xi_1,\cdots,f_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}[\Psi(\xi_1,\cdots,f_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n)]-\Psi(\xi_1,\cdots,g_{D_i}\xi_i,\cdots,\xi_n)\right\}$$

が成立する．$\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ も，高々 $D_1,\cdots,D_n$ に極をもつ有理型関数であることに注意すると，この式の右辺は0になり，求める結果が示された． ∎

この命題により，ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ の $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上のセクション Ψ に対して

$$(1.22)\qquad \nabla\Psi = d\Psi-\sum_{i=1}^{n}L_{-1}^{(i)}\Psi dz_i$$

によって，∇ を定義すると，∇ はベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ の接続を与えることがわかる．さらに，

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}L_{-1}^{(i)}dz_i$$

は，$d\omega=0$ を満たし，また，

$$[L_{-1}^{(i)},L_{-1}^{(j)}]=0,\quad 1\leqq i,j\leqq n$$

より，$\omega\wedge\omega=0$ が得られるので，∇ の曲率は0つまり，∇ は**平坦接続**(flat connection)であることがしたがう．

次に，$\Psi:\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_n}\to\mathbb{C}$ を，$V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$ に制限して得られる

$$\Psi_0:V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}\longrightarrow\mathbb{C}$$

に対して，上の接続を具体的に記述する．

いくつか記号を準備する．Lie環 $\mathfrak{g}$ の Cartan–Killing 形式に関する正規直

交基底を $\{I_\mu\}$ で表し，

$$\Omega = \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$$

とおく．また，$i, j, 1 \leqq i \neq j \leqq n$ に対して，Ω の Ψ_0 の i 番目と j 番目の成分への作用を $\Omega^{(ij)}\Psi_0$ で表す．つまり，$\xi_j \in V_{\lambda_j}$，$1 \leqq j \leqq n$ について

$$\begin{aligned}&[\Omega^{(ij)}\Psi_0](\xi_1, \cdots, \xi_n)\\&= \sum_\mu \Psi_0(\xi_1, \cdots, I_\mu\xi_i, \cdots, I_\mu\xi_j, \cdots, \xi_n)\end{aligned}$$

と定める．

式(1.15)から，$X \otimes t^{-1} \in \hat{\mathfrak{g}}$，$\xi_j \in V_{\lambda_j}$，$1 \leqq j \leqq n$ に対して，

$$\begin{aligned}&[(X \otimes t^{-1})^{(i)}\Psi](\xi_1, \cdots, \xi_n)\\&= \sum_{j,\, j \neq i} (z_i - z_j)^{-1}\Psi_0(\xi_1, \cdots, X\xi_j, \cdots, \xi_n)\end{aligned} \tag{1.23}$$

と表される．Virasoro 作用素 L_{-1} の表現空間 V_{λ_j} への作用は

$$L_{-1} = \frac{1}{k+2} \sum_\mu I_\mu \otimes t^{-1} \cdot I_\mu$$

と表すことができるので，Ψ への作用 $L_{-1}^{(i)}\Psi$ を $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$ に制限して考えることができる．これを $\left(L_{-1}^{(i)}\Psi\right)_0$ で表す．次の命題が成立する．

命題 1.17　共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ の要素 Ψ について，$L_{-1}^{(i)}\Psi$ の $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n}$ への制限 $\left(L_{-1}^{(i)}\Psi\right)_0$ は，

$$\left(L_{-1}^{(i)}\Psi\right)_0 = \frac{1}{k+2} \sum_{j,\, j \neq i} \frac{\Omega^{(ij)}\Psi_0}{z_i - z_j}$$

と表される．また，同じ意味で，$L_n^{(i)}$，$n \geqq 0$ の作用については，

$$(L_n^{(i)}\Psi)_0 = 0, \quad n > 0 \tag{1.24}$$

$$\left(L_0^{(i)}\Psi\right)_0 = \Delta_{\lambda_i}\Psi_0 \tag{1.25}$$

が成立する．ここで，Δ_{λ_i} は，L_0 の既約表現 V_{λ_i} への作用の固有値である．

［証明］　L_{-1} の作用については，式(1.23)より，

$$\Psi(\xi_1,\cdots,(I_\mu\otimes t^{-1}\cdot I_\mu)\xi_i,\cdots,\xi_n)$$
$$=\sum_{j,\,j\neq i}(z_i-z_j)^{-1}\Psi_0(\xi_1,\cdots,I_\mu\xi_i,\cdots,I_\mu\xi_j,\cdots,\xi_n)$$

となるので，求める結果が得られる．L_n，$n\geqq 0$ については，L_n の $\xi_i\in V_{\lambda_i}$ の作用を見ると，

$$L_n\xi_i=0,\quad n>0$$
$$L_0\xi_i=\Delta_{\lambda_i}\xi_i$$

となっていることから，ただちに示される．∎

命題 1.16 と命題 1.17 をあわせると，ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ の接続 ∇ に関する**水平切断**(horizontal section)，つまり，$\nabla\Psi=0$ を満たすセクション Ψ について，これを $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$ に制限した Ψ_0 は，微分方程式

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial z_i}=\frac{1}{k+2}\sum_{j,\,j\neq i}\frac{\Omega^{(ij)}\Psi_0}{z_i-z_j},\quad 1\leqq i\leqq n$$

を満たすことがわかる．この微分方程式を **Knizhnik–Zamolodchikov 方程式**とよぶ．以下，しばしば，**KZ 方程式**と略記する．また，(1.22)で導入した接続 ∇ を **KZ 接続**とよぶ．

以下，KZ 接続の水平切断は，Riemann 球面の Möbius 変換に対して，ある種の共変性をもつことを示す．次の命題は，その共変性を無限小バージョンで記述したものである．

命題 1.18　共形ブロックバンドル $\mathcal{E}_\lambda$ の KZ 接続 ∇ についての水平切断，つまり，$\nabla\Psi=0$ を満たすセクション Ψ の $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_n}$ への制限 Ψ_0 は，$r=-1,0,1$ に対して，

$$\sum_{i=1}^n z_i^r\left(z_i\frac{\partial}{\partial z_i}+(r+1)\Delta_{\lambda_i}\right)\Psi_0=0$$

を満たす．

［証明］　まず，命題の Ψ_0 が，$\mathfrak{g}$ の作用で不変であることから，

$$\sum_{j=1}^n\Omega^{(ij)}\Psi_0=0,\quad 1\leqq i\leqq n$$

が成立することがわかる．同じ理由で

$$\sum_{i\neq j}\Omega^{(ij)}\Psi_0=-\sum_{j=1}^{n}\Omega^{(jj)}\Psi_0$$

となるが，$\Omega^{(jj)}$ は，Casimir 作用素であることと，対称性 $\Omega^{(ij)}=\Omega^{(ji)}$ を用いて，

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\Omega^{(ij)}\Psi_0=-(k+2)\sum_{j=1}^{n}\Delta_{\lambda_j}\Psi_0 \tag{1.26}$$

が得られる．

$r=-1$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi_0}{\partial z_i}=\frac{1}{k+2}\sum_{i\neq j}\frac{\Omega^{(ij)}\Psi_0}{z_i-z_j}$$

となり，これに対称性 $\Omega^{(ij)}=\Omega^{(ji)}$ を適用することにより示される．

$r=0$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial\Psi_0}{\partial z_i}=\frac{1}{k+2}\sum_{i\neq j}\frac{z_i\Omega^{(ij)}\Psi_0}{z_i-z_j}$$

となるが，

$$\sum_{i\neq j}\frac{z_i\Omega^{(ij)}}{z_i-z_j}=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\Omega^{(ij)}$$

と式(1.26)をあわせて，求める結論が得られる．

最後に $r=1$ の場合を示す．

$$\sum_{i=1}^{n}z_i^2\frac{\partial\Psi_0}{\partial z_i}=\frac{1}{k+2}\sum_{i\neq j}\frac{z_i^2\Omega^{(ij)}\Psi_0}{z_i-z_j}$$

の右辺は

$$-\frac{2}{k+2}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j\Omega^{(jj)}\right)\Psi_0$$

と変形されるので，$\Omega^{(jj)}$ が，Casimir 作用素であることを用いると証明される． ∎

上の命題で，$r=-1$ の場合，得られた結果は，Ψ_0 が平行移動

$$w_j=z_j+c,\quad c\in\mathbb{C},\quad 1\leqq j\leqq n$$

で不変であることを意味している．また，$r=0$ の場合，$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ は，いわゆる Euler 作用素であり，結果は，Ψ_0 が相似変換

$$w_j = \alpha z_j, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

に対して

$$\Psi_0(w_1, \cdots, w_n) = \alpha^{-\Delta_{\lambda_1} - \cdots - \Delta_{\lambda_n}} \Psi_0(z_1, \cdots, z_n)$$

とふるまうことを示している．$r=1$ のとき，Möbius 変換

$$f_\epsilon(z_j) = \frac{z_j}{-\epsilon z_j + 1} \tag{1.27}$$

を考えよう．この Möbius 変換に対して

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \Psi_0(f_\epsilon(z_1), \cdots, f_\epsilon(z_n)) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \frac{\partial}{\partial z_j} \Psi_0(z_1, \cdots, z_n)$$

であるから，命題の $r=1$ の場合を積分した形でかくと，

$$\begin{aligned} &\Psi_0(f_\epsilon(z_1), \cdots, f_\epsilon(z_n)) \\ &\quad = \prod_{j=1}^{n} (-\epsilon z_j + 1)^{2\Delta_{\lambda_j}} \Psi_0(z_1, \cdots, z_n) \end{aligned}$$

が得られる．Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ の Möbius 変換は，平行移動，相似変換および，(1.27)のタイプの一次分数変換で生成されるので，これらをまとめて，次の命題が得られる．

命題 1.19 Möbius 変換

$$w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d}, \quad 1 \leqq j \leqq n$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1$$

について，Ψ_0 は，

$$\Psi_0(z_1, \cdots, z_n) = \prod_{j=1}^{n} (cz_j + d)^{-2\Delta_{\lambda_j}} \Psi_0(w_1, \cdots, w_n)$$

を満たす． □

このようにして，KZ 接続の水平切断の，Möbius 変換に関する共変性が明らかになった．この共変性によって，KZ 接続は，点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$

全体で定義されることもわかる.

§1.6　頂点作用素と作用素積展開

ここでは，共形場理論を場の作用素の立場から，再びながめてみよう．とくに，頂点作用素の定式化と，さまざまな作用素の交換関係を支配する作用素積展開について説明する.

Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1$ 上の 3 点 $0, p, \infty$ に，レベル k の最高ウエイト $\lambda_0, \lambda, \lambda_\infty$ をそれぞれ与えて，1.4 節と同様に共形ブロックの空間を定義する．点 p の座標を z で表す．共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(0, p, \infty; \lambda_0, \lambda, \lambda_\infty^*)$ は，線形写像

$$\Psi : \mathcal{H}_{\lambda_\infty}^* \otimes \mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

で，高々，原点，無限遠点，および，点 p に極をもち，$\mathfrak{g}$ に値をとる有理型関数の，それぞれの点における Laurent 展開を用いた作用で不変なもの全体であった．共形ブロックの空間の要素 Ψ を，$\mathcal{H}_{\lambda_\infty}^* \otimes V_\lambda \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0}$ に制限すると，$X \otimes t^n$, $X \in \mathfrak{g}$ の作用に対する上の不変性は，$u \otimes v \otimes w \in \mathcal{H}_{\lambda_\infty}^* \otimes V_\lambda \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0}$ について，

$$-\Psi((u(X \otimes t^n)) \otimes v \otimes w) + z^n \Psi(u \otimes Xv \otimes w) + \Psi(u \otimes v \otimes ((X \otimes t^n)w)) = 0$$

と表すことができる．この条件を満たす Ψ に対して，

$$(\phi(v, z))(u \otimes w) = \Psi(u \otimes v \otimes w)$$

とおくと，$\phi(v, z)$ は，$v \in V_\lambda$ について線形で，$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に依存する双線形写像

$$\phi(v, z) : \mathcal{H}_{\lambda_\infty}^* \otimes \mathcal{H}_{\lambda_0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

を与える．これを，$\mathcal{H}_{\lambda_0}$ から無限直積 $\overline{\mathcal{H}}_{\lambda_\infty} = \prod_{d \geqq 0} \mathcal{H}_{\lambda_\infty, d}$ への作用素とみて，有理型関数 $X \otimes t^n$ の作用についての不変性を，$\phi(v, z)$ と $X \otimes t^n$, $X \in \mathfrak{g}$ の交換関係で表すと，

$$[X \otimes t^n, \phi(v, z)] = z^n \phi(Xv, z) \qquad (1.28)$$

が得られる．これを**ゲージ不変性**(gauge invariance)とよぶ．さらに，Ψ の $V_{\lambda_\infty}^* \otimes V_\lambda \otimes V_{\lambda_0}$ への制限 Ψ_0 について，これを，前節で導いた KZ 接続の水平

切断ととることにより，対応する $\phi(v,z)$ は，

$$[L_n,\,\phi(v,z)] = z^n\Big(z\frac{d}{dz}+(n+1)\Delta_\lambda\Big)\phi(v,z) \tag{1.29}$$

を満たすことを示すことができる．関係式(1.28)と(1.29)を満たす作用素を，**頂点作用素**(chiral vertex operator)，あるいは，**プライマリー場**(primary field)とよぶ．

条件(1.29)は，以下で述べるように，$\phi(v,z)(dz)^{\Delta_\lambda}$ の正則な共形変換に対する不変性を表していると解釈される．直観的な説明を与えておこう．$w=f(z)$ で記述される正則な変換に対する $\phi(v,z)(dz)^{\Delta_\lambda}$ の不変性を書き下すと，

$$\phi(v,f(z)) = \Big(\frac{df}{dz}\Big)^{-\Delta_\lambda}\phi(v,z)$$

と表される．この無限小バージョンを考えて，共形変換 $f_\epsilon(z)=z-\epsilon(z)$ に関する不変性を仮定すると $\phi(v,z)$ の変換 f_ϵ による無限小変位 $\delta_\epsilon\phi(v,z)$ は

$$\delta_\epsilon\phi(v,z) = \Big(\Delta_\lambda\epsilon'(z)+\epsilon(z)\frac{\partial}{\partial z}\Big)\phi(v,z)$$

の形となる．とくに，$\epsilon(z)=\epsilon z^{n+1}$ の場合を考えると，これは，条件(1.29)の右辺で与えられる．一方，変換 $f_\epsilon=z-\epsilon z^{n+1}$ はベクトル場 $-z^{n+1}\dfrac{d}{dz}$ を生成するので，これは，無限小変換として条件(1.29)の左辺で表されると考えられる．

表現空間 $\mathcal{H}_\lambda$ の作用素 $X(z)$, $T(z)$, $X\in\mathfrak{g}$, $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ を

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(X\otimes t^n)z^{-n-1} \tag{1.30}$$

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}L_n z^{-n-2} \tag{1.31}$$

と定める．$T(z)$ は，**ストレステンソル**(energy momentum tensor)とよばれる．

次に，これらの作用素の合成を記述する作用素積展開(OPE)について説明しよう．領域 $|w|>|z|>0$ において作用素 $X(w)$ と $\phi(v,z)$ の合成は

$$X(w)\phi(v,z) = \frac{1}{w-z}\phi(Xv,z)+((w-z)\text{ について正則な項}) \tag{1.32}$$

の形の展開をもつ．これは領域 $|z|>|w|>0$ における $\phi(v,z)X(w)$ に解析接続される．作用素の合成についてのこのような表示を**作用素積展開**(operator product expansion)とよぶ．これは，作用素 $X(w), \phi(v,z)$ の合成が $w=z$ にどのような特異性をもつかを記述するものである．作用素積展開は，交換関係(1.28)から直接示すことができるが，後に述べるように，逆に，作用素積展開は，作用素の交換関係を規定する強力なものである．物理学者によって書かれた文献では，しばしば，この作用素積展開を出発点として，理論が組み立てられている．

$T(z)$ と $\phi(v,z)$ についても，領域 $|w|>|z|>0$ において同様の作用素積展開

(1.33)

$$T(w)\phi(v,z) = \left(\frac{\Delta_\lambda}{(w-z)^2}+\frac{1}{w-z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(v,z)+((w-z) \text{ について正則な項})$$

が成立する．これは領域 $|z|>|w|>0$ における $\phi(v,z)T(w)$ に解析接続される．

$T(z)$ どうしの合成についても，作用素積展開を記述しておこう．領域 $|w|>|z|>0$ において作用素積展開

$$(1.34)\quad T(w)T(z) = \frac{c/2}{(w-z)^4}+\frac{2T(z)}{(w-z)^2}+\frac{1}{w-z}\frac{\partial}{\partial z}T(z) + ((w-z) \text{ について正則な項})$$

が成立し，領域 $|z|>|w|>0$ における $T(z)T(w)$ に解析接続される．

作用素積展開から，どのようにして，作用素の交換関係が再現されるかを

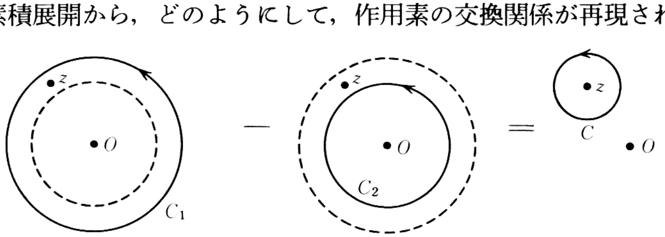


図 1.3　積分路の変形による交換関係の解釈

見よう．まず，$X\otimes t^n$ および L_n の $\phi(v,z)$ との交換子は，

$$(1.35)\qquad [X\otimes t^n,\ \phi(v,z)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C w^n X(w)\phi(v,z)dw$$

$$(1.36)\qquad [L_n,\ \phi(v,z)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C w^{n+1} T(w)\phi(v,z)dw$$

と表せることを示す．ここで積分路 C は w 平面で z のまわりを正の向きに一周する十分小さい円周である．実際，$L_n\phi(v,z)$ は C_1 を w 平面で $|w|>|z|$ を満たすように原点のまわりを正の向きに一周する円周として，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_1} w^{n+1}T(w)\phi(v,z)dw$$

とかけ，また，$\phi(v,z)L_n$ も C_2 を w 平面で $|z|>|w|$ を満たすように原点のまわりを正の向きに一周する円周として，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_2} w^{n+1}\phi(v,z)T(w)dw$$

とかけるので，$T(w)\phi(v,z)$ $(|w|>|z|>0)$ が $\phi(v,z)T(w)$ $(|z|>|w|>0)$ に解析接続されることから，図 1.3 のように積分路をとって，求める結果が得られる．作用素積展開(1.33)と比較してみると，交換関係(1.29)が再現されることがわかる．このようにして，作用素の交換関係は，作用素積展開によって支配されていることがわかる．したがって，作用素 $\phi(v,z)$ の正則な共形変換に関する共変性は，作用素積展開(1.33)の帰結としてとらえることができる．$X\otimes t^n$ の方についても同様にして，作用素積展開から，ゲージ不変性が導かれる．

作用素積展開(1.34)から，Virasoro 代数の交換関係が導かれることを示しておこう．まず，γ を z 平面で，原点のまわりを正の向きに一周する円周として，L_n は

$$L_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma z^{n+1}T(z)dz$$

と表される．また，菅原作用素の合成 L_mL_n は，w 平面で，原点のまわりを正の向きに一周する円周 γ_1，および，z 平面で，原点のまわりを正の向きに

一周する円周 γ_2 を，γ_1 の半径が γ_2 の半径より大きくなるようにとって

$$L_m L_n = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} w^{m+1} z^{n+1} T(w)T(z) dw dz$$

と表される．$L_n L_m$ に対しても，$|z|>|w|$ の状況で同様の記述ができる．これを，解析接続して，図1.3と同様に，w 平面で，z のまわりを正の向きに一周する曲線 C をとって，積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C w^{m+1} z^{n+1} T(w)T(z) dw$$

の $z=0$ における留数を計算する．これにより，$L_m L_n - L_n L_m$ が得られ，命題1.7で述べた，菅原作用素の満たす Virasoro 代数の関係式が再現される．

ストレステンソル $T(z)$ の共形変換に関する変換則を記述するために，**Schwarz 微分**(Schwarzian derivative)

$$S(f,z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \tag{1.37}$$

を導入する．よく知られているように，次の補題が成立する．

補題 1.20　一次分数変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc = 1$$

に対して，$S(f,z)=0$ が成立する．逆に，$S(f,z)=0$ ならば，f は，一次分数変換である． □

頂点作用素の場合と同様に，共形変換 $f_\epsilon(z) = z - \epsilon(z)$ による無限小変位 $\delta_\epsilon T(z)$ を，$T(z)$ の交換関係を用いて記述すると，

$$\delta_\epsilon T(z) = \epsilon(z)\frac{\partial}{\partial z}T(z) + 2\epsilon'(z)T(z) + \frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{1.38}$$

となることがわかる．最後の項 $\frac{c}{12}\epsilon'''(z)$ が存在することから，$T(z)$ は2階の共変テンソルではないことがわかる．ただし，$\epsilon(z) = \epsilon z^{n+1}$ とおいて，$n = -1, 0, 1$ の場合，つまり，f_ϵ が，一次分数変換を生成する場合のみ，この項が0になることから，(1.38)を積分形でかいて，次の命題が得られる．

命題 1.21　ストレステンソル $T(z)$ は，正則な変換 $w = f(z)$ に対して，

$$T(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12} S(f, z)$$

と変換する. □

上の考察をもとにして，トーラスの共形ブロックの空間について，概観しておこう. $\tau \in \mathbb{C}$ を複素上半平面の要素として，1 と τ で $\mathbb{Z}$ 上生成される格子 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ を Γ とおく. トーラス $E = \mathbb{C}/\Gamma$ の共形ブロックの空間を定式化しよう. 複素解析的に同型の範囲で，$0 \leqq \mathrm{Re}\,\tau < 1$ とできるので，そのように仮定し，$q = e^{2\pi i \tau}$ とおく. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ に相似変換 $f(w) = qw$ で生成される群 G を作用させ，その商空間 $\mathbb{C}^*/G$ を考える. 対応 $w = e^{2\pi i z}$ によって，$\mathbb{C}^*/G$ は，トーラス E と同型で，図 1.4 のように，1 と τ のはる平行四辺形の $\mathbb{C}^*$ における像は，

$$|q| \leqq |w| \leqq 1$$

で定まる円環領域 D である. トーラスは，円 $|w| = 1$ と $|w| = |q|$ を相似変換 $f(w) = qw$ によってはりあわせることにより得られる.

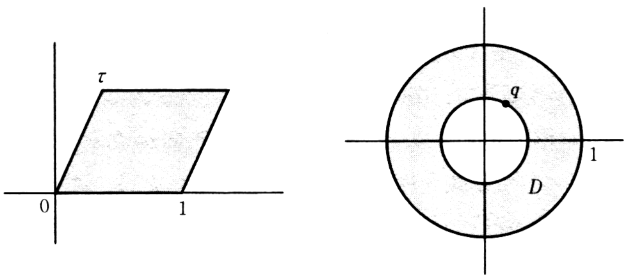


図 1.4 トーラスの基本領域とその変換 $w = e^{2\pi i z}$ による像

変換 $w = e^{2\pi i z}$ によって，複素平面は $\mathbb{C}^*$ に移されるが，変換の Schwarz 微分を計算すると，$\mathbb{C}^*$ の方の Virasoro 作用素 L_0' は，もとの L_0 を用いて，

$$L_0' = L_0 - \frac{c}{24}$$

と表されることがわかる. また，このことから，相似変換 $f(w) = qw$ の最高ウエイト表現 $\mathcal{H}_\lambda$ への作用は，(1.11)のスペクトル分解 $\bigoplus_{d \geqq 0} \mathcal{H}_{\lambda, d}$ に関して，

$$(1.39)\quad q^{L_0-\frac{c}{24}}\xi = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\tau\left(\Delta_\lambda + d - \frac{c}{24}\right)\right)\xi, \quad \xi \in \mathcal{H}_{\lambda,d}$$

で与えられる．

トーラス $\mathbb{C}/\Gamma$ 上に，相異なる点 $p_1, \cdots, p_n$ をとり，これらの点に，レベル k の最高ウエイト $\mu_1, \cdots, \mu_n$ を与える．点 $p_1, \cdots, p_n$ は，領域 D の点として表しておく．また，w 平面で，原点に，レベル k の最高ウエイト λ の双対表現，無限遠点に，レベル k の最高ウエイト λ を与えて，これらのデータに対応する Riemann 球面の共形ブロックの空間を考える．この共形ブロックの要素 Φ に対して，原点と無限遠点に対応した表現空間への，$f(w) = qw$ で定まる相似変換の作用(1.39)でテンソル積を縮約したものを

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda} q^{L_0-\frac{c}{24}}\Phi : \mathcal{H}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\mu_n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

とおき，これらで生成される線形空間を $\mathcal{H}_\lambda(D)$ とおく．さらに，

$$\mathcal{H}_E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}) = \bigoplus_\lambda \mathcal{H}_\lambda(D)$$

とおいて，これをトーラス E の共形ブロックの空間とよぶ．ここで，和はレベル k の最高ウエイト $\lambda = 0, 1, \cdots, k$ すべてをわたる．

とくに，$n = 0$ の場合は，共形ブロックの空間の基底として，

$$(1.40)\qquad \chi_\lambda(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda} q^{L_0-\frac{c}{24}}, \quad \lambda = 0, 1, \cdots, k$$

がとれる．式(1.40)で定義される $\chi_\lambda(\tau)$, $\lambda = 0, 1, \cdots, k$ は，$A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環の**指標**(character)とよばれる．トーラス の共形ブロックの空間の基底は，このようにアフィン Lie 環の指標で与えられ，これらは，**Verlinde 基底**とよばれている．文献[8]に示されているように，Kac–Peterson によって，$A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環の指標は，$SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関して，

$$(1.41)\qquad \chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_\mu S_{\lambda\mu}\chi_\mu(\tau)$$

$$\chi_\lambda(\tau+1) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\Delta_\lambda - \frac{c}{24}\right)\right)\chi_\lambda(\tau)$$

と変換されることが知られている．ここで，$S_{\lambda\mu}$, Δ_λ は，それぞれ，

$$S_{\lambda\mu}=\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\frac{(\lambda+1)(\mu+1)\pi}{k+2} \tag{1.42}$$

$$\Delta_\lambda=\frac{\lambda(\lambda+2)}{4(k+2)} \tag{1.43}$$

で与えられる．Δ_λ は，菅原作用素 L_0 の V_λ における固有値であり，共形ウエイトとよばれる量であった．これらは，以後の議論でしばしば登場する．

次に，レベル k の $SU(2)$ Wess–Zumino–Witten 模型の Verlinde 代数について説明する．R_k を，基底 v_λ，$\lambda=0,1,\cdots,k$ をもつ複素線形空間として，R_k に積構造を

$$v_\lambda\cdot v_\mu=\sum_\nu N_{\lambda\mu}^\nu v_\nu$$

によって導入する．ここで，$N_{\lambda\mu}^\nu$ は，0 または 1 で，命題 1.15 で記述した，Riemann 球面の 3 点にレベル k の最高ウエイトを与えたときの共形ブロックの空間の次元である．ここでは，$\mathfrak{g}=sl_2(\mathbb{C})$ の場合を扱っているので，$N_{\lambda\mu}^\nu=N_{\lambda\mu\nu}$ であった．1.3 節で説明したように，Riemann 球面の 4 点にレベル k の最高ウエイトを与えたときの共形ブロックの空間を，図 1.2 の 2 通りのグラフを用いて計算することにより，R_k は，上の積について結合法則を満たすことがわかる．R_k を **Verlinde 代数**または**フュージョン代数**(fusion algebra) とよぶ．

N_λ を，$\mu\nu$ 成分が $N_{\lambda\mu\nu}$ であるような $k+1$ 次の正方行列とする．とくに，N_1 は，ij 成分が，$|i-j|=1$ のとき 1 で，それ以外の場合は 0 となる行列であり，これは，(1.42)の $S=(S_{\lambda\mu})$ によって対角化され，その固有値は，$S_{1\mu}/S_{0\mu}$，$\mu=0,1,\cdots,k$ である．N_λ は，N_1 の多項式でかけることが確かめられるので，やはり S によって対角化されて，その固有値は，$S_{\lambda\mu}/S_{0\mu}$，$\mu=0,1,\cdots,k$ となることがわかる．このことから次の命題が示される．

命題 1.22（**Verlinde 等式**）　共形ブロックの空間の次元 $N_{\lambda\mu\nu}$ は，行列 S を用いて，

$$N_{\lambda\mu\nu}=\sum_\alpha\frac{S_{\lambda\alpha}S_{\mu\alpha}S_{\nu\alpha}}{S_{0\alpha}}$$

と表される. □

上の命題は，代数的には次のように述べ直すことができる．R_k において，

$$w_\mu = S_{0\mu} \sum_\lambda S_{\lambda\mu} v_\lambda$$

として基底を変換すると

$$w_\lambda \cdot w_\mu = \delta_{\lambda\mu} w_\lambda$$

が成立する．つまり，w_λ はベキ等元になる．元来の Verlinde の主張は，一般に共形場理論のフュージョン則が，モジュラー変換の S 行列によって，対角化できるというものであり，ここで述べたのは，その特別な場合である．

《要約》

1.1　ループ代数の中心拡大であるアフィン Lie 環，および S^1 上の多項式ベクトル場のなす Lie 環の複素化の中心拡大である Virasoro 代数を定義した．

1.2　ループ代数の中心拡大を記述する 2–コサイクルから，ループ群上の複素直線束が構成できることを示した．

1.3　Wess–Zumino–Witten 模型において，境界のある Riemann 面 Σ については，$\exp(-S_\Sigma(f))$ がループ群上の複素直線束のファイバーの要素とみなせることを示した．

1.4　Riemann 球面上の共形ブロックの空間を定義し，その次元を与えるフュージョン則を記述した．

1.5　点の配置の空間上の共形ブロックバンドルを構成し，このベクトル束に，KZ 接続とよばれる平坦接続が自然に入ることを示した．

1.6　頂点作用素を定義し，関連した作用素積展開を記述した．

2 Jones–Witten 理論

この章では，共形ブロック束に定義されたKZ接続のホロノミーの構造を調べる．このホロノミーとして，組みひも群の表現が現れるが，これを用いて，リンクの位相不変量であるJones多項式が自然に得られることを示す．3次元多様体のWitten不変量は，元来はChern–Simons汎関数の分配関数として，提唱されたものであるが，ここでは，共形場理論のホロノミーの立場から，Witten不変量を構成する．さらに，このような観点から，共形場理論によって，Atiyahの意味の位相的場の理論の例が与えられることを示す．また，Chern–Simons理論と，曲面上の接続の空間の幾何学との関係にふれ，共形場理論による構成と，Chern–Simons理論によるアプローチとの関連を説明する．

§2.1 KZ方程式と組みひも群の表現

複素ベクトル空間$\mathbb{C}^n$の超平面で$z_i = z_j$で定義されるものをH_{ij}とおく．複素平面$\mathbb{C}$の相異なるn個の点の配置の空間$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$は，定義により，

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i<j} H_{ij}$$

と表される．$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$の基本群を**純組みひも群**(pure braid group)とよび，P_nとかく．また，n次の対称群$\mathcal{S}_n$が，座標の入れ替えによって$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$

に作用するが，この作用により得られる商空間 $Y_n = \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})/\mathcal{S}_n$ の基本群を**組みひも群**(braid group)とよび，B_n とかく．自然な全射 $p: B_n \to \mathcal{S}_n$ があり，その核 $\mathrm{Ker}\, p$ が，純組みひも群 P_n である．組みひも群 B_n の要素は，図 2.1 に示したように，互いに交わらない n 本のひものイソトピー類として表すことができる．B_n は図 2.1 に示した生成元 σ_i, $i=1,\cdots,n-1$，とそれらの間の関係式

$$(2.1)\qquad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad i = 1,\cdots,n-2$$

$$(2.2)\qquad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| > 1$$

によって与えられることが知られている．

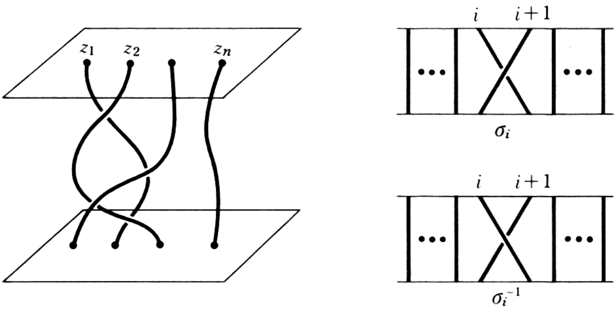


図 2.1　組みひも群とその生成元

点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ において，対数微分形式

$$\omega_{ij} = d\log(z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}, \quad i \neq j$$

を考える．これらは，2 次関係式

$$(2.3)\qquad \omega_{ij}\wedge\omega_{jk} + \omega_{jk}\wedge\omega_{ki} + \omega_{ki}\wedge\omega_{ij} = 0, \quad i<j<k$$

を満たす．

1.5 節で，共形ブロックバンドルに自然に入る平坦接続として，KZ 方程式を導入したが，一般の有限次元複素単純 Lie 環に対する KZ 方程式をあらためて定式化しておこう．有限次元複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその表現の族 $\rho_j: \mathfrak{g} \to$

$\mathrm{End}(V_j)$, $1 \leqq j \leqq n$ を固定する．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan–Killing 形式についての正規直交基底を $\{I_\mu\}$ とおく．$\Omega = \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$ として，Ω の $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ の i 番目と j 番目の成分への作用として与えられる $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ の線形変換を Ω_{ij}, $i \neq j$ で表す．つまり，

$$\Omega_{ij} = \sum_\mu 1 \otimes \cdots \otimes \rho_i(I_\mu) \otimes \cdots \otimes \rho_j(I_\mu) \otimes \cdots \otimes 1 \tag{2.4}$$

とおく．

KZ 方程式とは，$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上定義された $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ に値をとる関数 $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$ についての微分方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{1}{\kappa} \sum_{j,\, j \neq i} \frac{\Omega_{ij} \Phi}{z_i - z_j} \tag{2.5}$$

である．ここで，κ は複素パラメータである．KZ 方程式は

$$\omega = \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \Omega_{ij} \omega_{ij}$$

とおくことにより，全微分方程式

$$d\Phi = \omega \Phi \tag{2.6}$$

としても表すことができる．Ω_{ij} について，次の補題が成立する．

補題 2.1 Ω_{ij}, $1 \leqq i, j \leqq n$ は，関係式

$$[\Omega_{ij} + \Omega_{jk}, \Omega_{ik}] = 0 \quad (i,\ j,\ k \text{ は互いに異なる}) \tag{2.7}$$

$$[\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] = 0 \quad (i,\ j,\ k,\ l \text{ は互いに異なる}) \tag{2.8}$$

を満たす．

［証明］ 式(2.8)は明らかであるが，(2.7)の方は $C = \sum_\mu I_\mu \cdot I_\mu$ がいわゆる Casimir 元で Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心に属することと，余積 Δ: $U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ を用いて，

$$\Omega = \frac{1}{2}(\Delta C - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$$

で表されることから従う． ∎

式(2.3)とあわせると，

$$\omega \wedge \omega = 0 \tag{2.9}$$

が得られる．ω は，$d\omega = 0$ を満たすので，

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0$$

となる．したがって，$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ を底空間として，$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ をファイバーとする自明なベクトル束の接続を $\nabla = d - \omega$ によって定めると，この接続の曲率は 0 となる．つまり，ω は，平坦接続を与える．

接続 ∇ のホロノミーとして，κ をパラメータとする純組みひも群の線形表現

$$\theta : P_n \longrightarrow \mathrm{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$$

が得られる．具体的には θ は次のように定まる．まず，x_0 を基点とする $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ のループ γ について，基点 x_0 のまわりで，全微分方程式(2.6)の一次独立な解 $(\Phi_1, \cdots, \Phi_m)$，$m = \dim V_1 \times \cdots \times \dim V_n$ をとり，これを，γ にそって解析接続することにより得られる x_0 のまわりでの解は

$$(\Phi_1, \cdots, \Phi_m)\theta(\gamma)$$

と表される．∇ が平坦接続であることから，$\theta(\gamma)$ は γ のホモトピー類のみによって定まる．このようにして，任意の複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその表現から，KZ 接続のホロノミーとして，純組みひも群の線形表現が得られた．これを，KZ 方程式の**モノドロミー表現**(monodromy representation)とよぶ．また，$V_1 = \cdots = V_n = V$ のとき，自明なベクトル束 $E = \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) \times V^{\otimes n}$ を対称群 $\mathcal{S}_n$ の対角作用でわることにより，Y_n 上のファイバーが $V^{\otimes n}$ のベクトル束 F を構成することができる．ここで，対称群の $V^{\otimes n}$ への作用は，テンソル積の成分の入れ替えで定義される．接続 ∇ は，上の対称群の作用で不変なので，ベクトル束 F の接続を定め，そのホロノミーとして，組みひも群の線形表現

$$\theta : B_n \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n})$$

が得られる．

次に，共形ブロックの状況にもどって，KZ 方程式のモノドロミー表現の構造を調べよう．1.4 節で定義した，$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ に対応したレベル k の共形ブロックの空間を扱う．まず，$\mathbb{CP}^1$ 上に相異なる 3 点 p_1, p_2, p_3 と $p_4 = \infty$ に，レベル k の最高ウエイト $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^*$ をそれぞれ与えて，共形ブロックの空

間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ を考察する．この共形ブロックの空間は，不変テンソルの空間

$$V_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{\lambda_4}=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3},V_{\lambda_4}) \tag{2.10}$$

に埋め込むことができるのであった．共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ をファイバーとする共形ブロックバンドルを $\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C})$ 上で考え，各ファイバーを上の不変テンソルの空間(2.10)に埋め込むと，式(2.5)で，$n=3$, $\kappa=k+2$ とおいたものが，このベクトル束の平坦接続 ∇ を与える．ここで，z_1,z_2,z_3 は，それぞれ，p_1,p_2,p_3 の座標を表す．KZ 方程式は，平行移動で不変なので，$z_1=0$ としてよい．座標変換 $z_2=u_1u_2$, $z_3=u_2$ をほどこして，3 重点 $z_1=z_2=z_3$ をブローアップすると，ω は $u_1=u_2=0$ のまわりで

$$\omega=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\Omega_{12}du_1}{u_1}+\frac{(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})du_2}{u_2}+\omega_1\right) \tag{2.11}$$

の形に表される．ここで，ω_1 は，$u_1=u_2=0$ のまわりで，正則な 1 次微分形式である．式(2.11)に現れる $\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}$, $\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})$ の，不変テンソルの空間 $V_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{\lambda_4}$ への作用を考えると，図 1.2 中央のタイプのグラフに対応する基底について，同時対角化されている．図 1.2 中央のように，グラフの内側の辺にウエイト λ を与えると，固有値は，それぞれ，

$$\Delta_\lambda-\Delta_{\lambda_1}-\Delta_{\lambda_2},\quad \Delta_{\lambda_4}-\Delta_{\lambda_1}-\Delta_{\lambda_2}-\Delta_{\lambda_3} \tag{2.12}$$

となる．KZ 方程式は，$u_1=u_2=0$ のまわりで，

$$\Phi_1(u_1,u_2)=u_1^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}}u_2^{\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})}h_1(u_1,u_2) \tag{2.13}$$

ただし，h_1 は一価正則，という形の解の基本系をもつ．

次に図 1.2 右のグラフに対応した解の基本系を構成しよう．やはり，$z_1=0$ として，$z_3-z_2=v_1v_2$, $z_3=v_2$ と座標変換すると，ω は $v_1=v_2=0$ のまわりで

$$\omega=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\Omega_{23}dv_1}{v_1}+\frac{(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})dv_2}{v_2}+\omega_2\right) \tag{2.14}$$

の形に表される．ここで，ω_2 は，$v_1=v_2=0$ のまわりで，正則な 1 次微分形式である．上の場合と同様に，$\frac{1}{\kappa}\Omega_{23}$, $\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})$ は，図 1.2 右のグラフに対応した，不変テンソルの空間の基底上，同時対角化されて，KZ 方

程式は，$v_1=v_2=0$ のまわりで，

$$\Phi_2(v_1,v_2)=v_1^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{23}}v_2^{\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})}h_2(v_1,v_2) \tag{2.15}$$

ただし，h_2 は一価正則，という形の解をもつ．

上の方法で得られた局所的な解を解析接続することにより，

$$\Phi_1=\Phi_2F \tag{2.16}$$

を満たす定数行列 F が定まる．これを**接続行列**(connection matrix)とよぶ．

ここで用いた座標変換は，ともに3重点 $z_1=z_2=z_3$ のブローアップ(blow-up)であり，点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_3(\mathbb{C})$ の2通りの部分コンパクト化を構成したと考えられる．接続行列 F はブローアップによって得られた正規交差因子の異なる交点のまわりでの解 Φ_1，Φ_2 の関係を与えるものであると解釈することができる．このようにして得られた2つの解 Φ_1,Φ_2 の関係を図2.2のようにグラフで示すことにする．

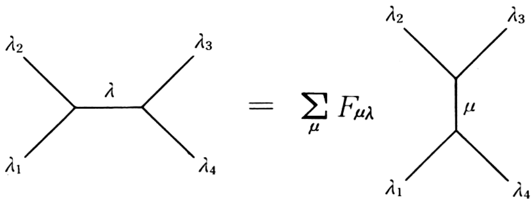


図 2.2　接続行列のグラフによる表示

これまでの議論では，解が式(2.13)のようなかたちに表され，対数の項が現れないことを用いてきたが，これは，KZ方程式の解の基底が1.6節で定義した頂点作用素の合成として表されることからも示すことができる．

ここで議論した $n=3$ のとき，KZ方程式は，$0,1,\infty$ に確定特異点をもつ一変数の Fuchs 型微分方程式に帰着され，接続行列は一変数関数のことばで述べることができることを説明しよう．KZ方程式(2.5)は，$n=3$ のとき，

$$\Phi(z_1,z_2,z_3)=(z_3-z_1)^{\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})}G\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right) \tag{2.17}$$

の形の解をもち，G は微分方程式

$$G'(x) = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\Omega_{12}}{x} + \frac{\Omega_{23}}{x-1}\right)G(x) \tag{2.18}$$

を満たすことが確かめられる.

実開区間 $0<x<1$ における微分方程式(2.18)の解の基本系で，それぞれ，$x=0$, $x=1$ のまわりで，

$$G_0(x) = x^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}}H_0(x)$$

$$G_1(x) = (1-x)^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{23}}H_1(x)$$

ただし，$H_0(x), H_1(x)$ は一価正則，という形に表される $G_0(x)$, $G_1(x)$ を考えよう．解析接続することにより，x によらない行列 F が存在して，

$$G_1(x) = G_2(x)F \tag{2.19}$$

とかけることがわかる．この行列 F は，$\Phi_1 = \Phi_2 F$ で定義されたものと同じである.

これまでの議論は，k を正の整数としてレベル k の共形ブロックの空間で行ったが，パラメータ k を一般にとって，Verma 加群が既約である状況でも，同様の構成をすることができる．また，上の状況で，$X=\Omega_{12}$, $Y=\Omega_{23}$ を非可換な形式的な変数と考えて，接続を与える F を，X, Y のベキ級数で表したものを **Drinfel'd アソシエーター**(Drinfel'd associator)とよぶ.

図 2.3 のように，円周上に $n+1$ 個の頂点をもち，各辺が円に含まれてい

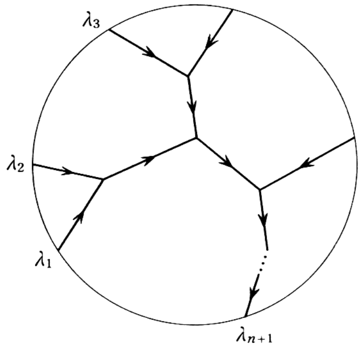


図 2.3 $n+1$ 本の外線をもつ樹形グラフ

て，また，円内のそれぞれの頂点に，3 本の辺が集まっている可縮なグラフを，$n+1$ 本の外線をもつ**樹形グラフ**(tree)とよぶ．一般の n についても，上で説明した $n=3$ の場合の構成を自然に拡張して，$n+1$ 本の外線をもつ樹形グラフに対して，点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ の部分コンパクト化と KZ 方程式の正規化された解を定義することができる．例えば，$z_1=0$ として，座標変換 $z_{k+1}=u_ku_{k+1}\cdots u_{n-1}$, $k=1,\cdots,n-1$ によって，$u_1=\cdots=u_{n-1}=0$ のまわりで，

$$(2.20)\quad \Phi_1 = u_1^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}} u_2^{\frac{1}{\kappa}(\Omega_{12}+\Omega_{13}+\Omega_{23})} \cdots u_{n-1}^{\frac{1}{\kappa}\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\Omega_{ij}} h_1(u_1,\cdots,u_{n-1})$$

ただし，$h_1(u_1,\cdots,u_{n-1})$ は一価正則，という形の解を考えることができる．このとき，各辺にウエイトを与えた樹形グラフに対応した共形ブロックの空間の基底上，

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq k}\Omega_{ij},\quad 2\leqq k\leqq n$$

は，同時対角化されていることに注意しよう．

図2.4は $n=4$ の場合で，解(2.20)は一番上のタイプの樹形グラフに対応している．その一つ下の右の樹木については，$z_1=0$ とおいて，$z_2=v_1v_3$，$z_4-z_3=v_2v_3$，$z_4=v_3$ と座標変換することにより，

$$(2.21)\qquad \Phi_2 = v_1^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}} v_2^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{34}} v_3^{\frac{1}{\kappa}\sum_{1\leqq i<j\leqq 4}\Omega_{ij}} h_2(v_1,v_2,v_3)$$

と表される解 Φ_2 が対応する．ここで $h_2(v_1,v_2,v_3)$ は一価正則関数である．領域 $z_1<z_2<z_3<z_4$ において

$$(2.22)\qquad \lim_{z_2\to z_1}\Phi_i\cdot(z_2-z_1)^{-\frac{1}{\kappa}\Omega_{12}},\quad i=1,2$$

を考えることにより，この2つの解の関係を与える接続行列は，すでに考察した $n=3$ の場合の接続行列で与えられることに注意しよう．このように，一般に異なる樹形グラフに対応した解の間の関係を与える接続行列は，$n=3$ の場合に帰着することができる．

$n=4$ の場合，KZ 接続が平坦であることを用いると，次の命題が示され

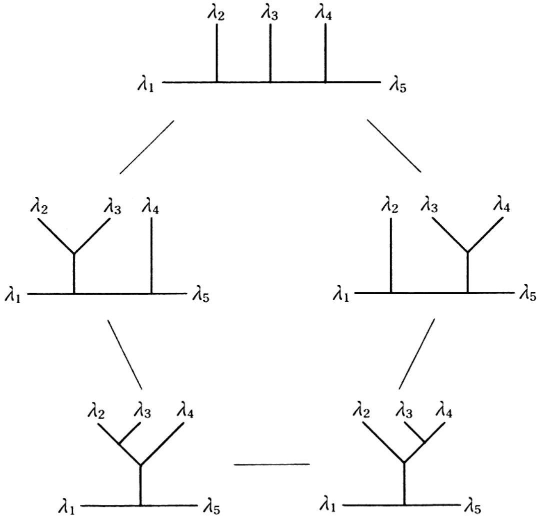


図 2.4　ペンタゴン関係式

る．

命題 2.2（ペンタゴン関係式）　図 2.4 に示したように，$n=4$ の場合 2 つの樹木について，これらを結ぶ経路が 2 通りあるが，これらの経路に対応する接続行列は一致する． □

KZ 方程式のモノドロミーとして得られる組みひも群の表現について考察しよう．実軸上に $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を，それぞれの座標 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ が $0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ を満たすようにとり，これらの点に $A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環のレベル k の最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を対応させる．また，p_0，p_{n+1} をそれぞれ，座標が，0, ∞ になるようにとっておき，これらに，最高ウエイト $\lambda_0=0$, $\lambda_{n+1}=0$ を対応させておく．$\boldsymbol{p}=(p_0, p_1, \cdots, p_n, p_{n+1})$ と，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}^*)$ に対する共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda})$ は，補題 1.13 で示したように，不変テンソルの空間 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} V_{\lambda_j},\ \mathbb{C}\right)$ に，多重線形写像の制限によって埋め込むことができるので，その像を，以降，共形ブロックの空間と同一視して，ここでは，$V_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ で表すことにする．ここで，$\mathcal{H}_{\lambda_j}$ を，双対加群 $\mathcal{H}_{\lambda_j}^*$ でおきかえて，

同様の構成をした共形ブロックの空間については，最高ウエイト λ_j を λ_j^* と表記して区別している．

組みひも群 B_n の生成元 σ_i に対して，σ_i の表す $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ の道にそった KZ 接続のホロノミーにより，線形写像

$$\rho(\sigma_i) : V_{\lambda_1 \cdots \lambda_i \lambda_{i+1} \cdots \lambda_n} \longrightarrow V_{\lambda_1 \cdots \lambda_{i+1} \lambda_i \cdots \lambda_n}$$

が定まる．ここで，$V_{\lambda_1 \cdots \lambda_{i+1} \lambda_i \cdots \lambda_n}$ は，図 2.5 のように，点 p_i，p_{i+1} の位置を入れ替えて得られる共形ブロックの空間を表す．すでに説明したように，KZ 接続は平坦接続であるので，この線形写像は，道のホモトピー類のみによって定まることに注意しよう．このようにして，一般に $\sigma \in B_n$ に対して，線形写像

$$\rho(\sigma) : V_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \longrightarrow V_{\lambda_{p(1)} \cdots \lambda_{p(n)}}$$

が，やはり，KZ 接続のホロノミーにより得られる．ここで，p は，組みひも σ がひきおこす n 個の文字の入れ替えを表す．さらに，組みひもの合成に関して，ρ は

$$\rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau), \quad \sigma, \tau \in B_n$$

を満たすことがわかる．

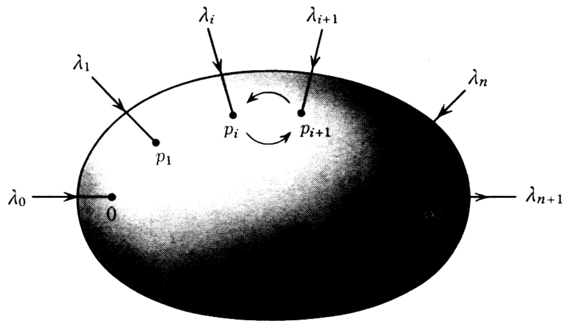


図 2.5　共形ブロックの空間への組みひも σ_i の作用

組みひもの作用を局所的に見るには，共形ブロックの特別な基底に注目すればよい．まず $n=3$ の場合を考えよう．式(2.13)で定義した解 Φ_1 については，組みひも σ_1 の作用は $P_{12} \exp\left(\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{\kappa}\Omega_{12}\right)$ で与えられることが

わかる．ここで P_{12} は λ_1, λ_2 に対応するテンソル積の成分の入れ替えを表す．この基底でみると，Ω_{12} は，対角化されていることに注意しよう．一方，組みひも σ_2 の作用については，式(2.15)で定義した解 Φ_2 に対して，$P_{23}\exp\left(\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{\kappa}\Omega_{23}\right)$ で与えられる．この場合は，Ω_{23} が対角化されている．このように，それぞれの解の基底の上で，σ_1，σ_2 の作用が記述できるが，大域的な組みひも群の作用の記述は，接続行列 F によってなされることがわかる．さらに，この節の樹形グラフに対応した解の接続行列の考察と同様にして，一般の n についても，組みひも σ_i の作用は $n=3$ のときの計算，つまり，局所的なモノドロミーの計算と，接続行列 F の計算に帰着される．

次に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ が $sl_2(\mathbb{C})$ で，表現 $V_{\lambda_1}, \cdots, V_{\lambda_n}$ が，2 次元既約表現の場合を考えよう．このとき，上で説明した方法によって $(z_{i+1}-z_i)^{\frac{1}{\kappa}\Omega_{i,i+1}}$ の部分の多価性を見ることにより，モノドロミー行列 $\rho(\sigma_i)$ の固有値を計算することができる．$q^{\frac{1}{2}}=\exp(\pi\sqrt{-1}/\kappa)$，$\eta=\exp(\pi\sqrt{-1}/2\kappa)$ とおくと $g_i=\eta\rho(\sigma_i)$ は，関係式

$$(g_i-q^{\frac{1}{2}})(g_i+q^{-\frac{1}{2}})=0 \tag{2.23}$$

を満たすことがわかる．生成元 σ_i に上の g_i を対応させて得られる組みひも群の表現を

$$\tilde{\rho}: B_n \longrightarrow \mathrm{End}(V_{\lambda_1\cdots\lambda_n})$$

とかくことにする．

一般に，0 でない複素パラメータ q に対して，$\mathbb{C}$ 上 $1, T_i$，$1 \leqq i \leqq n-1$ で生成されて関係式

$$T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1} \quad i=1,\cdots,n-2$$
$$T_iT_j=T_jT_i, \quad |i-j|>1$$
$$(T_i-q^{\frac{1}{2}})(T_i+q^{-\frac{1}{2}})=0$$

で定義される代数を**岩堀–Hecke 代数**(Iwahori-Hecke algebra)とよび $H_n(q)$ とかく．

上の考察をまとめると，次の定理が証明されたことになる．

定理 2.3　Lie 環 $sl_2(\mathbb{C})$ とその 2 次元既約表現から定義される KZ 方程式のモノドロミーとして得られる組みひも群の表現 $\tilde{\rho}: B_n \to \mathrm{End}(V_{\lambda_1\cdots\lambda_n})$ は，岩堀–Hecke 代数 $H_n(q)$ の表現を与える． □

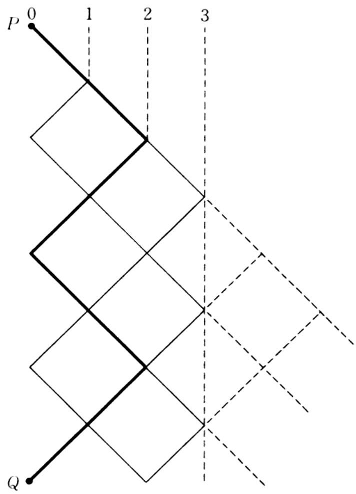


図 2.6　図は，$k=3, n=7$ の場合で，表現空間の基底は，P と Q を実線上で結ぶ最短経路と対応している．

ここに現れる組みひも群の表現は，既約なユニタリ表現であることが知られている(文献[44]参照)．表現空間の基底は，図 2.6 に示される経路と対応している．このように，表現空間の基底がレベル k から定まる制約をうける根拠は，命題 1.14 で求めた，共形ブロックの空間の満たす代数関係式によっている．基底は，具体的には，命題 1.15 のフュージョン則によって記述される．この節で述べたように，組みひもの作用の計算は，$n=3$ の場合に帰着される．この場合，共形ブロックの空間は高々 2 次元になり，KZ 方程式は，Gauss の超幾何微分方程式になる．したがって，超幾何関数の接続を用いて組みひも群の作用を具体的に記述することができる．また，定理 2.3 を，$\mathfrak{g}=sl_m(\mathbb{C})$ で，$V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_n}$ が，m 次元の自然な表現である場合に拡

張することもできる．この場合は，$\kappa=k+m$，$\eta=\exp(\pi\sqrt{-1}/m\kappa)$ とおいて，同様の結果が成立する．

命題 1.18 で述べたように，共形ブロックの空間は，Möbius 変換による共変性をもっていた．$V_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ には，組みひも群 B_n だけではなく，さらに，写像類群 $\mathcal{M}_{0,n}$ が線形に作用することがわかる．ここで，$\mathcal{M}_{0,n}$ は，Riemann 球面から，$p_1,\cdots,p_n$ を中心とする十分小さい円板をのぞいて得られる曲面からそれ自身への，境界を固定して向きを保つ微分同相写像全体のイソトピー類のなす群である．とくに，p_j を中心とする円板の境界に平行な曲線 C_j についての Dehn のひねりは，スカラー写像 $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_j)$ となる．ここで，Dehn のひねりとは，C_j にそって切り開き 2π 回転してはり直す微分同相である (2.4 節図 2.24 参照)．写像類群の作用については，2.4 節であらためてとりあげる．

§2.2　共形場理論と Jones 多項式

この章でも，Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，$sl_2(\mathbb{C})$ の場合を扱う．Riemann 球面上に n 個の異なる点 $p_1,\cdots,p_n$ をとり，これらの座標を $z_1,\cdots,z_n$ とする．レベルとよばれる正の整数 k を固定し，レベル k の最高ウエイトの組 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して，1.4 節で，共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\lambda})$ を定義した．さらに，1.5 節で，点 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ を動かすとき，共形ブロックの空間は，Riemann 球面上の相異なる n 個の点の配置の空間 $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上のベクトル束をなし，そこには，KZ 接続とよばれる平坦接続が自然に入ることを示した．この接続のホロノミーによって，組みひも群の共形ブロックの空間への作用が得られる．

ここで述べた，組みひも群の共形ブロックの空間への作用を用いて，リンクの位相不変量を構成できることを説明する．まず，リンクについての用語を説明しておく．**リンク**(link)とは，S^1 のいくつかの共通部分をもたない和集合から S^3 への埋め込み

$$f : S^1\cup\cdots\cup S^1 \longrightarrow S^3$$

のことである．それぞれの S^1 の像をリンクの成分とよび，$L=L_1\cup\cdots\cup L_m$

と表す．とくに，成分が1つのリンクを**結び目**(knot)とよぶ．リンク L, L' が同値であるとは，S^3 の向きを保つ同相写像 h が存在して，$L'=h(L)$ となることをいう．それぞれの成分に向きが与えられたリンクで2つの成分 L_1, L_2 をもつものについて，その**絡み数**(linking number) $lk(L_1, L_2)$ は基本的な不変量である．これは，L_1 を境界にもつ S^3 内の向きのついた曲面と，L_2 の交点数として定義される．また，絡み数はリンク $L_1 \cup L_2$ の射影図において，L_1 と L_2 の正の交差の数から L_1 と L_2 の負の交差の数を引いたものの1/2としても計算される．ここで正の交差，負の交差は図2.7のように定められる．L の**フレーミング**(framing)とは，リンクのそれぞれの成分の法バンドルの自明化を表す整数で，リンクの成分と，その管状近傍上の閉曲線との絡み数で表される．フレーミングを表すために，図2.7のように，リンクをリボンで表示することもある．

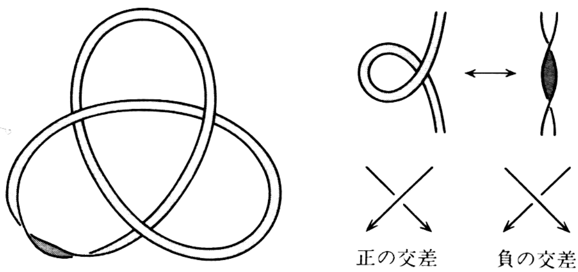


図2.7　フレーミングのリボンによる表示．左図はトレフォイルとよばれる結び目にフレーミング4を与えたもの．

L を $\mathbb{R}^3$ 内の，向きとフレーミングの与えられたリンクとする．まず，リンクの成分 $L_1, \cdots, L_m$ に，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ を対応させる．リンクの射影図を，xt 平面上 $x>0$ の部分に，図2.8のように，極大点，極小点がすべて孤立し，かつ，極大値，極小値がすべて異なるようにとっておく．さらに，この図式を直線 $t=t_j$, $j=0,1,2,\cdots,s$ で切って，$t_j<t<t_{j+1}$ の部分が，組みひも群の生成元 σ_i に対応する図式，σ_i^{-1} に対応する図式，および，極大点または極小点をただ1つ含む図式の

いずれかになるようにしておく．これらの 4 通りの図式を**基本タングル**(elementary tangle)とよぶ．ただし，基本タングルに現れる曲線の向きについてはすべての可能性を考える必要がある．とくに，直線 $t=t_0$，$t=t_s$ は，リンクの図式とは交わらないとしている．直線 $t=t_j$ と，リンクの図式との交点を $q_1,\cdots,q_n$ として，それぞれの点に，次のように，最高ウエイトを対応させる．点 q_j を通るリンクの成分に最高ウエイト λ が与えられているとき，リンクの向きが，点 q_j で下向きであれば λ を，また，上向きであれば λ^* を対応させる．さらに，原点 O と無限遠点 ∞ に，それぞれ最高ウエイト 0 を与え，対応する共形ブロックの空間を補題 1.13 の制限写像 i^* によって，不変テンソルの空間に埋め込んでおく．このようにして，t_j に対応して得られる線形空間を $V(t_j)$ で表す．とくに，$V(t_0)=V(t_s)=\mathbb{C}$ である．

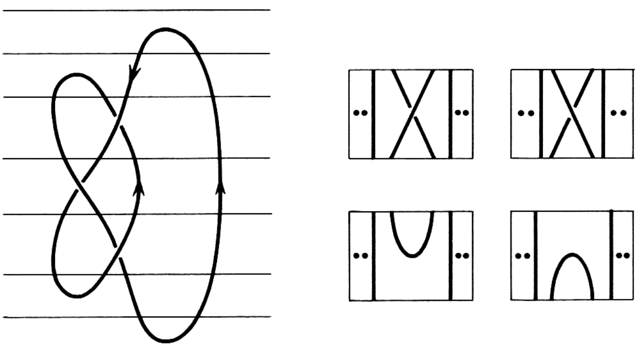


図 2.8　リンクの図式を横に切って，右図の基本タングルに分解する．

図 2.8 の基本タングルに対応して，線形写像

(2.24)　　$$Z_j : V(t_j) \longrightarrow V(t_{j+1}),\quad 0 \leqq j \leqq s-1$$

を定義することができる．具体的には，組みひも群の元 σ_i，σ_i^{-1} に対応する図式については，前節で述べた KZ 方程式のモノドロミー表現によって，線形写像を定めることができ，また，極大点，極小点については，図 2.9 のように，最高ウエイト 0 の表現を補って，前節で議論した，KZ 方程式の接続行列を用いて，線形写像を定めることができる．

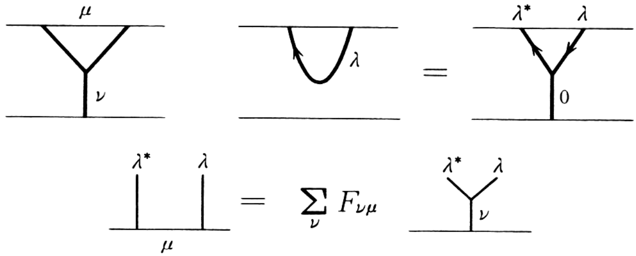


図 2.9　極小点と KZ 方程式の接続行列

線形写像 Z_j, $0 \leqq j \leqq s-1$ を合成して,

$$Z(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m) = Z_{s-1} \circ \cdots \circ Z_1 \circ Z_0(1) \tag{2.25}$$

とおく. KZ 接続が平坦であることから次の補題が得られる.

補題 2.4　$Z(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ は, 図 2.10 に示した, リンクの水平方向の局所変形で不変である. □

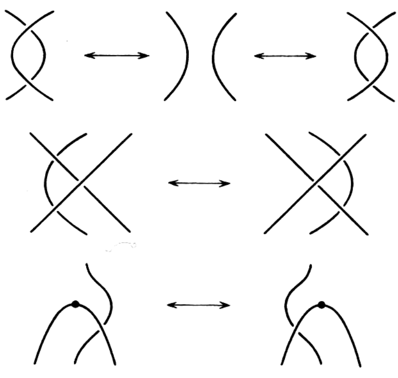


図 2.10　リンクの水平方向の局所変形

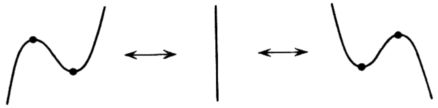
$Z(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ は, 図 2.11 に示した, 2 つの臨界点のキャンセルの操作に関して, 不変ではないので, 以下, 次のような修正をほどこす. 図 2.11 右に示した, 極大点と極小点をそれぞれ 2 つずつもち, フレーミングが 0 の自明な結び目を K_0 として,

$$d(\lambda) = Z(K_0;\lambda)^{-1}$$

とおく．リンク L の成分 L_j，$1\leqq j\leqq m$ の極大点の個数を μ_j とかいて，

$$J(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=d(\lambda_1)^{\mu_1}\cdots d(\lambda_m)^{\mu_m}Z(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$$

とおく．



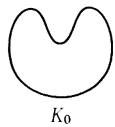


図 2.11　左は 2 つの臨界点のキャンセルの操作

ただし，ここで，リンクの成分には，番号付けが与えられているとしていて，リンクが同値であるという条件において，成分の番号を保つような同相写像のみを考えることにする．この意味でリンクが同値であることは，図 2.10，2.11 に示した局所的な変形で移りあうことと同等であることが知られているので，次の定理が得られる．

定理 2.5　$J(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ は，各成分の向きとフレーミング，および，番号付けが与えられたリンクの位相不変量である．　□

定理 2.3 のあとに説明した $\mathcal{M}_{0,n}$ の作用から，フレーミングの変化についての次の命題が示される．

命題 2.6　L' をリンク $L=\bigcup_{j=1}^{m}L_j$ に対して，成分 L_j のフレーミングを 1 増加させたリンクとすると，

$$J(L';\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_{\lambda_j}\right)J(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$$

が成立する．　□

とくに $\lambda=1$ のとき，リンクの各成分にすべて λ を対応させて，$J(L;\lambda,\cdots,\lambda)$

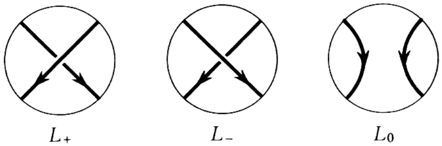


図 2.12

を考え，これをJ_Lで表す．リンク図式を局所的に，図2.12のように変形させて得られるリンクを，それぞれ，L_+，L_-，L_0で表す．これらの不変量J_{L_+}，J_{L_-}，J_{L_0}の間には，次に述べるように，つねに，**スケイン関係式**(skein relation)とよばれる関係式が存在する．J_Lのスケイン関係式は，

$$q^{1/m} = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{m(k+2)}$$

とおいて，次のように述べられる．

命題2.7　J_Lは，スケイン関係式

$$q^{1/4}J_{L_+} - q^{-1/4}J_{L_-} = (q^{1/2} - q^{-1/2})J_{L_0}$$

を満たす．

［証明］　2.1節で与えられた，組みひもσ_iの表現行列$G_i = \rho(\sigma_i)$は，定理2.3の証明で述べたように，最小多項式

$$(G_i + q^{-3/4})(G_i - q^{1/4}) = 0$$

を満たす．この式を変形して，

$$q^{1/4}G_i - q^{-1/4}G_i^{-1} = (q^{1/2} - q^{-1/2})\ id$$

が得られる．J_Lは，定義より，基本タングルに対応する線形写像の合成として表される．L_+，L_-，L_0の基本タングルの合成による表示を比較すると，一箇所で，それぞれ，正の組みひもσ_i，負の組みひもσ_i^{-1}，および，自明な組みひも，という違いがあり，それ以外の基本タングルは，一致している．したがって，G_iの満たす上の関係式から，ただちに，J_Lのスケイン関係式が示される． ∎

スケイン関係式は，共形ブロックの空間の立場からは，次のように理解す

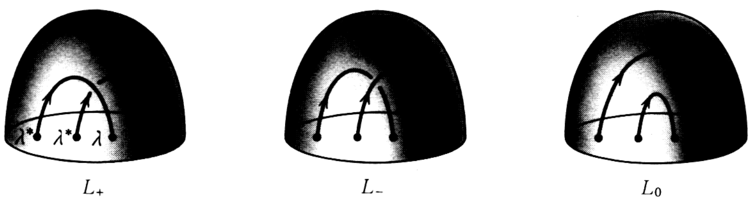


図2.13　共形ブロックとスケイン関係式

ることができる．図 2.13 のように，状況を局所化して，Riemann 球面上の 4 点に，最高ウエイト $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ が指定された，共形ブロックの空間を考える．今の場合，これらは，$sl_2(\mathbb{C})$ の 2 次元既約表現の最高ウエイト λ を用いて $\lambda, \lambda, \lambda^*, \lambda^*$ と表されるので，命題 1.15 によって，共形ブロックの空間は，2 次元であることがわかる．タングル L_+，L_-，L_0 に対応して，共形ブロックの空間の線形写像が得られるが，共形ブロックの空間が，2 次元であることから，3 つの線形写像の間に一次関係式が得られる．これを，具体的に書き下したものが，上のスケイン関係式にほかならない．

構成したリンクの不変量 J_L は，リンクのフレーミングの指定によっていたが，フレーミングによらない不変量を構成するために，リンク L の図式において，正の交差の個数から負の交差の個数を引いたものを $w(L)$ とかいて，

$$P_L = d(1)^{-1} \exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_1 w(L)\right) J_L$$

とおく．命題 2.6 を用いると，P_L は，フレーミングによらない，向きの与えられたリンクの不変量であることがわかる．また，$w(L_+)$，$w(L_-)$，$w(L_0)$ を比較して，命題 2.7 を用いると，P_L はスケイン関係式

$$qP_{L_+} - q^{-1}P_{L_-} = (q^{1/2} - q^{-1/2})P_{L_0}$$

を満たすことがわかり，また，自明な結び目については

$$P_{\bigcirc} = 1$$

が成り立つ．これは，Jones 多項式の 1 つのバージョンである．**Jones 多項式**は，スケイン関係式

$$t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}$$
$$V_{\bigcirc} = 1$$

によって特徴づけられるリンクの不変量で，Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ に値をもつ．ここで得られた P_L は，Jones 多項式において，変数 $t^{1/2}$ に，$-q^{-1/2}$ を代入することによって得られる．このようにして共形場理論から導かれる Jones 多項式の 1 のベキ根における特殊値は，次節で説明する，3 次元多様体の Witten 不変量の構成において，重要な役割を果たす．t を変数とした，もとの形の Jones 多項式を共形場理論の立場から得るには，これまでの議論で，k を一般のパラメータとして，$\mathcal{H}_{k,\lambda}$ を Verma 加群 $M_{k,\lambda}$ でおきか

えて，上の構成を行えばよい．

不変量の構成のための正規化定数として導入した $d(\lambda)$ を $\lambda=1$ のときに計算しておこう．L_+，L_-，L_0 が図 2.14 の 3 つのリンクの場合に，$P_{L_+}=1$，$P_{L_-}=1$，$P_{L_0}=d(1)$ であることから，スケイン関係式を用いて，

$$d(1)=\frac{q-q^{-1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}$$

となることがわかる．

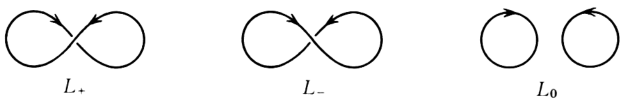


図 2.14　スケイン関係式による $d(1)$ の計算

これまでは，それぞれの成分に，最高ウエイト 1 を与えた場合の不変量が，基本的に Jones 多項式の特殊値であることを見てきたが，一般に，レベル k の最高ウエイト $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ を各成分に与えた場合には，次のように，ケーブリングとよばれる操作と，1.6 節で説明した，フュージョン代数 R_k の構造から，不変量 $J(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ を計算することができる．フレーミング t の与えられた結び目 $K=K_0$ に対して，図 2.15 のように，K_0 の管状近傍の境界上に，K_0 との絡み数が，t に等しくなるように，あらたに，結び目 K_1 を与

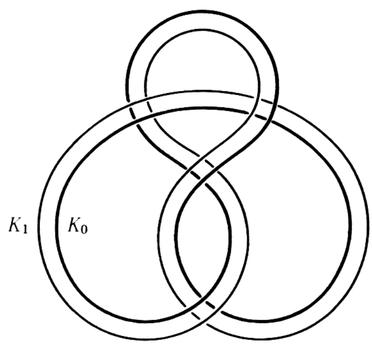


図 2.15　結び目 K_0 のケーブリング

える操作を，**ケーブリング**(cabling)とよぶ．K_1 にもフレーミング t を与えておく．このようにして，2 つの成分をもつリンク $K_0 \cup K_1$ が得られる．

補題 2.8 上のケーブリングの操作によって得られるリンク $K_0 \cup K_1$ のそれぞれの成分に，レベル k の最高ウエイト λ, μ を与えるとき，

$$J(K_0, K_1; \lambda, \mu) = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu}^{\nu} J(K; \nu)$$

が成立する．ここで，$N_{\lambda\mu}^{\nu}$ は，フュージョン代数 R_k の構造定数である． □

上の補題により，リンクの各成分に，フュージョン代数 R_k の要素 $x_1, \cdots, x_m$ を与えて，不変量 $J(L; x_1, \cdots, x_m)$ を定義することができる．まず，$x_1, \cdots, x_m$ が，最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ に対応する要素であるときは，これまで通り，$J(L; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ で定義する．これを，帰納的に，フュージョン代数 R_k に拡張していくわけであるが，ある成分 L_j に，積 $v_\lambda \cdot v_\mu \in R_k$ を与えたときには，L_j に上のケーブリングの操作をほどこして，それぞれの成分に，λ, μ を与えて定義する．補題 2.8 により，もとのリンク L の不変量の一次結合で表すことができる．このようにして，多重線形写像

$$J(L) : R_k^{\otimes m} \longrightarrow \mathbb{C}$$

が，$J(L)(x_1, \cdots, x_m) = J(L; x_1, \cdots, x_m)$ によって定まる．一般に，$J(L; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ の計算は，ケーブリングの操作により，リンクの成分の数をふやすことによって，すべての成分に最高ウエイト 1 を与えたリンクに関する不変量の計算に帰着することができる．

不変量 $J(L; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ のそのほかの性質をあげておこう．

補題 2.9 K を自明な結び目とし，これに，フレーミング 0 と，レベル k の最高ウエイト λ を与える．このとき，

$$J(K; \lambda) = d(\lambda) = \frac{q^{(\lambda+1)/2} - q^{-(\lambda+1)/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

が成立する．

[証明] まず，式(1.42)の $S_{\lambda\mu}$ を用いると

$$\frac{q^{(\lambda+1)/2} - q^{-(\lambda+1)/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = \frac{S_{0\lambda}}{S_{00}}$$

と表されることに注意しよう．また，K をフレーミング 0 を与えた自明な結び目とするとき，$J(K;\lambda)$ の定義から，$J(K;\lambda)=d(\lambda)$ は，ただちに従う．自明な結び目に関するケーブリングにより，

$$d(\lambda)d(\mu)=\sum_{\nu}N_{\lambda\mu}^{\nu}d(\nu) \tag{2.26}$$

が成立していることがわかる．また，$d(\lambda)$ は，この式と $d(1)$ の値によって特徴づけられる．$d(1)$ については，すでに示されているので，$d(\lambda)=\dfrac{S_{0\lambda}}{S_{00}}$ が，実際に(2.26) を満たすことを示せばよい．これは，命題 1.22 で示した Verlinde 等式を用いて，確かめることができる． ∎

以下，$J(L;\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ をしばしば，$J(L;\lambda)$ と略記する．2 つのリンク L_1, L_2 の和集合として与えられたリンク $L_1\cup L_2$ について，L_1 に最高ウエイトの列 μ_1，L_2 に最高ウエイトの列 μ_2 によって，各成分のウエイトを指定したものを $J(L_1\cup L_2;\mu_1\cup\mu_2)$ で表す．次の命題は，不変量 $J(L;\lambda)$ の構成法からただちにしたがう．

命題 2.10　互いに交わらない 3 次元球体 B_1，B_2 に含まれるリンク L_1, L_2 に対して，

$$J(L_1\cup L_2;\mu_1\cup\mu_2)=J(L_1;\mu_1)J(L_2;\mu_2)$$

が成立する． □

リンク L の鏡像を $\overline{L}$ で表す．つまり，$\overline{L}$ は，S^3 の向きを反対にする同相写像による L の像である．フレーミングについては，鏡像をとることによって，符号が反対になる．リンクの鏡像に対して，次の命題が成立する．

命題 2.11　向きとフレーミングの与えられたリンク L の鏡像を $\overline{L}$ とすると，

$$J(\overline{L};\lambda)=\overline{J(L;\lambda)}$$

が成り立つ．ここで，右辺は，$J(L;\lambda)$ の複素共役を表す．

［証明］　ケーブリングの操作を用いると，命題の証明は，すべての成分に与えられた最高ウエイトが 1 の場合に帰着できる．この場合 $d(\lambda)$ が実数であることと，命題 2.7 で示した，J_L のスケイン関係式から，$J_{\overline{L}}(q)=J_L(q^{-1})$ となるが，q が，1 のベキ根であることから，求める結論が得られる． ∎

Jones 多項式については，やはり，スケイン関係式によって，$V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$ が成立していることがわかる．図 2.16 は，スケイン関係式を用いて，トレフォイル結び目(trefoil)とその鏡像の Jones 多項式を計算したものである．

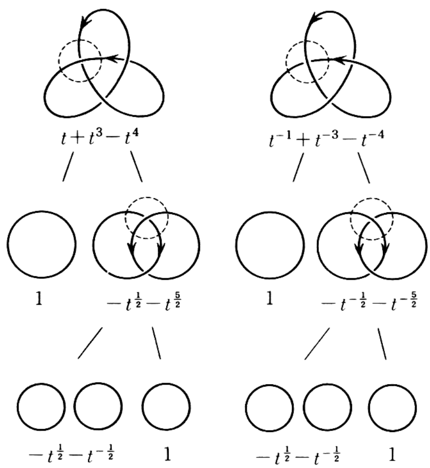


図 2.16　トレフォイルとその鏡像の Jones 多項式

リンクに対する上の構成は，向きとフレーミングの与えられたタングルに拡張できる．まず，**タングル**(tangle)について説明する．複素平面 $\mathbb{C}$ と，単位区間 $[0,1]$ の直積を X とおく．$X_0 = \mathbb{C}\times\{0\}$ 内の実軸上に，点 $p_1, \cdots, p_m$ をとり，また，$X_1 = \mathbb{C}\times\{1\}$ 内の実軸上に，点 $q_1, \cdots, q_n$ をとる．X 内のコンパクト 1 次元多様体で，上の，$p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n$ を境界にもつものを (m,n) タングルとよぶ．タングルを，図 2.17 のように射影図で表す．タングルの連結成分は，いくつかの閉曲線，および，$p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n$ のいずれかを端点にもつアークからなる．ここでは，これらの連結成分に，すべて，向きを指定する．また，それぞれの成分にフレーミングを与えておく．

リンクの不変量 $J(L;\lambda)$ は，リンクの各成分に対して，最高ウエイトを与え，リンクを横に切ることによって，基本タングルに分解して，それぞれのレベルに，共形ブロックの空間を対応させ，さらに，基本タングルに対応し

た，共形ブロックの空間の間の線形写像を合成することによって構成された．このプロセスをみると，上の (m,n) タングルについても，タングルのそれぞれの連結成分に，最高ウエイトを与えることにより，X_0 に対応する共形ブロックの空間から，X_1 に対応する共形ブロックの空間への線形写像を構成することができる．

この構成をもう少し具体的に説明しよう．まず，$p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n$ のいずれかを端点にもつアークに対して，レベル k の最高ウエイトを指定する．各点 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n$ に対して，その点を通過するアークが，下向きのときは，そのアークに与えられた表現を，また，その点を通過するアークが，上向きのときは，そのアークに与えられた表現の双対表現を，それぞれ対応させる．このようにして，$p_1,\cdots,p_m$ に与えられた表現の最高ウエイトを $\mu_1,\cdots,\mu_m$，また $q_1,\cdots,q_n$ に与えられた表現の最高ウエイトを $\nu_1,\cdots,\nu_n$ とする．さらに，(m,n) タングル T の，閉曲線からなる連結成分のそれぞれに，レベル k の最高ウエイトを与える．これを λ で表す．(m,n) タングルを基本タングルの合成に分解することにより，線形写像

$$J(T;\lambda): V_{\mu_1\cdots\mu_m} \longrightarrow V_{\nu_1\cdots\nu_n} \tag{2.27}$$

が得られる．これを，**タングル作用素**(tangle operator)とよぶ．

次の命題もただちに示される．

命題 2.12　向きとフレーミングのついた $(1,1)$ タングル T を閉じて得られるリンクを $\widehat{T}$ で表す．図 2.17 のようにウエイトを与えるとき，

$$J(\widehat{T_1\circ T_2}) = J(\widehat{T}_1)J(\widehat{T}_2)\frac{S_{00}}{S_{0\lambda}}$$

が成立する．　□

タングル作用素を用いると，リンクの不変量 $J(L;\lambda)$ は，次のように解釈することもできる．図 2.18 のように，リンクを，極大点，極小点を含まないように，水平方向の平面で切って，この切り口に対応する，共形ブロックの空間を $V(t)$ とおく．この平面の下側のタングルを T_+，上側のタングルを T_- で，それぞれ表す．T_+ に対応したタングル作用素による，1 の行き先を $J(T_+)\in V(t)$ で表す．T_- について，上下を反対にして，同様の構成を行う

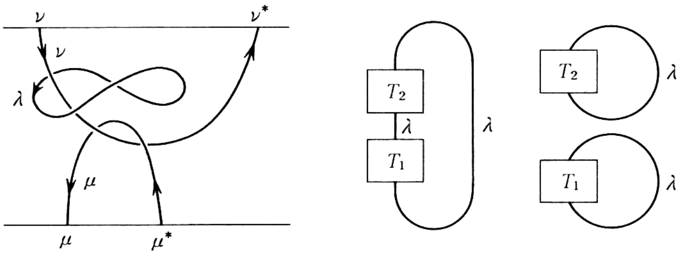


図 2.17

と，$J(T_-) \in V(t)^*$ が定まる．$V(t)$ と双対空間 $V(t)^*$ の自然なペアリングを用いて，

$$J(L) = \langle J(T_+), J(T_-) \rangle$$

と表すことができる．このような考え方は，後に，位相的場の理論の立場からあらためて説明する．

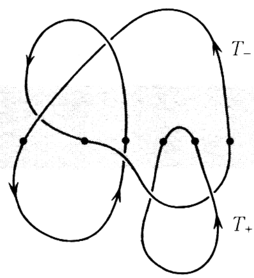


図 2.18

§2.3　3 次元多様体の Witten 不変量

この節では，Witten によって，論文[1]において，Chern–Simons ゲージ理論の立場から提唱された 3 次元多様体の位相不変量を共形場理論を用いて定式化する．

L を S^3 内の，フレーミングの与えられたリンクとする．このような L に対して，以下に説明する Dehn サージェリーとよばれる操作によって，3 次元

多様体を構成することができる．L の成分を $L_1 \cup \cdots \cup L_m$ として，L の管状近傍 $N(L) = N(L_1) \cup \cdots \cup N(L_m)$ をとる．それぞれの $N(L_j)$, $1 \leqq j \leqq m$ は，ソリッドトーラス，つまり S^1 と 2 次元円板 D の直積に同相である．$N(L_j)$ の境界 $\partial N(L_j)$ 上に，結び目 L_j のフレーミングを与える閉曲線 γ_j を指定しておく．γ_j と L_j の絡み数が，L_j のフレーミングを定める整数である．また，$H_j \cong D \times S^1$, $1 \leqq j \leqq m$ をソリッドトーラスの m 個のコピーとして，それぞれの H_j の境界上にメリディアン m_j を与えておく．ここで，メリディアンとは，S^1 上の点 p を固定して，$\partial D \times \{p\}$ と表される，∂H_j 上の閉曲線である．$E(L) = \overline{S^3 \setminus N(L)}$ とおく．$E(L)$ の境界は，

$$\partial E(L) = \partial N(L_1) \cup \cdots \cup \partial N(L_m)$$

と表される．次に，同相写像

$$f : \partial H_1 \cup \cdots \cup \partial H_m \longrightarrow \partial N(L_1) \cup \cdots \cup \partial N(L_m)$$

を，$f(m_j) = \gamma_j$, $1 \leqq j \leqq m$ を満たすようにとる．同相写像 f によって，$E(L)$ と，$H_1 \cup \cdots \cup H_m$ を境界ではりあわせて得られる 3 次元多様体を，M_L とおく．このようにして，リンク L の管状近傍をとりのぞき，フレーミングにしたがって，ソリッドトーラスを埋め戻す操作を L にそった **Dehn サージェリー**(Dehn surgery)とよぶ．M_L は，フレーミングの与えられたリンク L の同値類によって，同相をのぞいて，一意に定まる．また，すべての，向きのついた境界のないコンパクト 3 次元多様体は，あるフレーミングの与えられたリンク L にそった Dehn サージェリーによって得られることが知られている．

M_L は，次のように，4 次元多様体の境界としても表すことができる．まず，S^3 を境界にもつ 4 次元球体 B^4 をとり，B^4 に，$L \subset \partial B^4$ のフレーミングにしたがって，2–ハンドルをはりあわせて得られる 4 次元多様体を W_L とおくと，$M_L = \partial W_L$ と表される．Dehn サージェリーについて，簡単な例をあげておこう．K を自明な結び目とする．K にフレーミング 1 を与えて Dehn サージェリーを行うと，得られる多様体は，S^3 である．また，自明な結び目 K にフレーミング 0 を与えて Dehn サージェリーを行うと，$S^2 \times S^1$ が得られる．

S^3 内のフレーミングの与えられたリンク L, L' にそった Dehn サージェリーで得られる3次元多様体 M_L, $M_{L'}$ について，これらが同相となるための条件は，L' が L から，**Kirby の操作**(Kirby move)とよばれる局所的な変形の有限回のくり返しによって得られることであることが知られている．ここでは，Fenn–Rourke([26]) によって定式化されたかたちで，定理として述べておく．

定理 2.13 (Kirby の操作)　3次元多様体 M_L, $M_{L'}$ は，L' が L から，図 2.19 に示した，リンクの局所的な変形の有限回のくり返しで得られるときに限り同相である．ここで，n は，$\varepsilon=\pm1$ として，ε フレーミングが与えられた自明な結び目をつらぬくひもの本数を表す．とくに，$n=0$ の場合は，3次元球体に含まれる ε フレーミングが与えられた自明な結び目をとりのぞく操作，およびその逆を示している． □

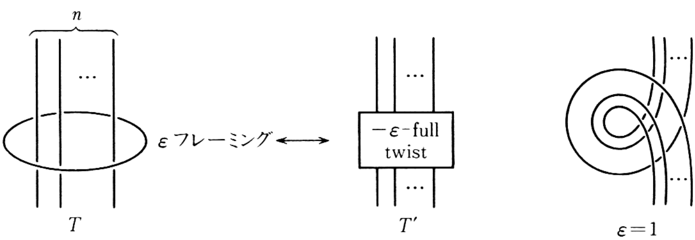


図 2.19　Kirby の操作．右図は $\varepsilon=1$ のときのタングル T'．

L を S^3 内のフレーミングの与えられたリンクとして，L の成分を $L_1,\cdots,L_m$ とする．互いに異なる i,j について，$L_i\cdot L_j$ で，L_i と L_j の絡み数を表す．また，$L_i\cdot L_i$ を，L_i のフレーミングを与える整数とする．A を $L_i\cdot L_j$ を成分とする m 次の正方行列とし，A を L の**絡み行列**(linking matrix)とよぶ．A は対称行列であり，その正の固有値の数を n_+，負の固有値の数を n_- とおく．リンク L の絡み行列の符号数 $\sigma(L)$ を n_+-n_- で定める．これは，4次元多様体 W_L の交叉形式の符号数と等しい．

3次元多様体の Witten 不変量を定義するために，第1章で扱った内容から，いくつかの記号を準備する．Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $sl_2(\mathbb{C})$ とする．正の整数 k を固

定して，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の最高ウエイトの集合を $P_+(k)$ とおく．具体的には，

$$P_+(k)=\{0,1,\cdots,k\}$$

である．1.2 節で説明したように，$\lambda\in P_+(k)$ に対して，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の，最高ウエイト λ の既約表現 $\mathcal{H}_\lambda$ が対応する．$\mathcal{H}_\lambda$ には，菅原形式によって，Virasoro 代数が作用し，中心の値は

$$c=\frac{3k}{k+2}$$

であった．ここでは，

$$C=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\ \frac{c}{24}\right)^{-3}$$

とおく．

1.6 節で説明したように $A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環のレベル k の指標 χ_λ, $\lambda\in P_+(k)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関して

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sum_\mu S_{\lambda\mu}\chi_\mu(\tau)$$

$$\chi_\lambda(\tau+1)=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\varDelta_\lambda-\frac{c}{24}\right)\right)\chi_\lambda(\tau)$$

と変換される，ここで，τ は複素上半平面の要素で，(1.42), (1.43) にも記したように，$S_{\lambda\mu}$, $\varDelta_\lambda$ は，具体的には，

$$S_{\lambda\mu}=\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\frac{(\lambda+1)(\mu+1)\pi}{k+2}$$

$$\varDelta_\lambda=\frac{\lambda(\lambda+2)}{4(k+2)}$$

で与えられる．これらの量は，これから構成する 3 次元多様体の不変量の記述において基本的な役割を果たす．

$$S(\tau)=-\frac{1}{\tau},\quad T(\tau)=\tau+1$$

で定まる一次分数変換 S, T が

$$S^2 = (ST)^3 = I$$

を満たすことを用いると，次の補題が得られる．

補題 2.14　上の $S_{\lambda\mu}$ は次の関係式を満たす．

$$C\sum_{\mu} S_{\lambda\mu}S_{\mu\nu}\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,(\Delta_\lambda+\Delta_\mu+\Delta_\nu)\bigr) = S_{\lambda\nu}$$

□

L を S^3 内の向きとフレーミングの与えられたリンクとして，L の成分を $L_1,\cdots,L_m$ とする．各成分に，$\lambda:\{1,\cdots,m\}\to P_+(k)$ によって，レベル k の最高ウエイトを与えて，前節で不変量 $J(L;\lambda(1),\cdots,\lambda(m))$ を定義した．この不変量に関して，次の結果が成立する．

命題 2.15　図 2.20 に示した Hopf リンク H の 2 つの成分に，レベル k の最高ウエイト λ,μ を与えたものについては，

$$J(H;\lambda,\mu) = \frac{S_{\lambda\mu}}{S_{00}}$$

が成立する．

［証明］　Hopf リンクを図 2.20 のように表示しておく．前節の補題 2.8 で示したケーブリングに関する結果から，

$$\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,(-\Delta_\lambda-\Delta_\mu)\bigr)J(H;\lambda,\mu) = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu}^{\nu}\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,(-\Delta_\nu)\bigr)\frac{S_{0\nu}}{S_{00}}$$

が得られる．これに，命題 1.22 で述べた Verlinde 等式と，補題 2.14 を適用して，求める結論が得られる．　∎

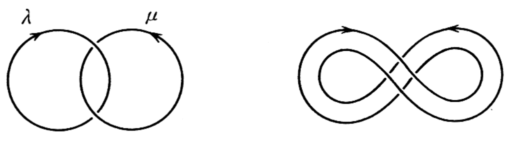


図 2.20　Hopf リンク

次の定理がこの節の主結果である．

定理 2.16　M をコンパクトで境界のない，向きの与えられた 3 次元多様体とする．M が，3 次元球面 S^3 内のフレーミングの与えられたリンク L に

そった Dehn サージェリーで得られるとき，

$$Z_k(M) = S_{00}C^{\sigma(L)}\sum_{\lambda} S_{0,\lambda(1)}\cdots S_{0,\lambda(m)}J(L;\lambda(1),\cdots,\lambda(m))$$

は，M の位相不変量である．ここで，リンク L は，m 個の成分 L_j，$1\leqq j\leqq m$ からなるとし，λ は，リンクの各成分に，レベル k のウエイトを与える写像 $\lambda:\{1,\cdots,m\}\to P_+(k)$ すべてをわたるものとする． □

定理で述べられている位相不変性の正確な意味は次の通りである．リンク L にそった Dehn サージェリーによって得られる 3 次元多様体を M_L とかく．また，定理の式の右辺の形は，リンク L によっているので，これを $Z_k(M_L)$ で表すことにする．このとき，2 つのリンク L, L' に対して，向きを保つ位相同型 $M_L\cong M_{L'}$ があれば，$Z_k(M_L)=Z_k(M_{L'})$ が成立する．また，定理において，$J(L;\lambda(1),\cdots,\lambda(m))$ を定義するためには，リンク L の向きを指定する必要があるが，$Z_k(M)$ の右辺のように λ に関する和をとったものは，リンク L の向きにはよらないことを注意しておこう．

［証明］ 上の $Z_k(M_L)$ が，Kirby の操作で不変であることを示す．まず，図 2.19 で，$n=0$ の場合を考えよう．補題 2.14 で，$\lambda=\nu=0$ とおくと，

$$C\sum_{\mu\in P_+(k)} S_{0\mu}\frac{S_{0\mu}}{S_{00}}\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_\mu\bigr)=1$$

が得られる．リンクの不変量 J に関して，自明な結び目に対する値（補題 2.9）と，フレーミングに関する命題 2.6 を用いて，Kirby の操作の $n=0$ の場合についての $Z_k(M_L)$ の不変性が得られる．

次に $n=1$ の場合を扱う．命題 2.12 で示したリンクの不変量 J の分解則を用いると，図 2.20 に示した Hopf リンクの場合について示しておけば十分である．このときは，命題 2.15 の Hopf リンクに関する結果を用いて，補題 2.14 で $\nu=0$ とおいて得られる式

$$C\sum_{\mu\in P_+(k)} S_{0\mu}\frac{S_{\lambda\mu}}{S_{00}}\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_\mu\bigr)=\exp\bigl(-2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_\lambda\bigr)\frac{S_{0\lambda}}{S_{00}}$$

から結論が得られる．

以下，n に関する帰納法で証明する．局所的に見て，図 2.19 の (n,n) タ

ングル T, T' の成分に図 2.21 左のようにウエイトを与えて，対応するタングル作用素に関する等式

$$C^{\sigma(L)}\sum_{\mu} S_{0\mu}J(T;\mu,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = C^{\sigma(L')}J(T';\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

を示せば十分である．ここで，T' は T に対して上の Kirby の操作をほどこして得られるリンクの一部を示す．前節の補題 2.8 で説明した方法により，図 2.21 に示したように，n 本のうちの最初の 2 本をひとまとめにすることにより，示したい等式の左辺は，$(n-1,n-1)$ タングル T'' についてのタングル作用素

$$J(T'';\mu,\nu,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$$

で表すことができる．この各々の項に関して，帰納法の仮定を用い，さらに，Kirby の操作による $\sigma(L)$ の変化を見ることにより，求める結論が得られる．

∎

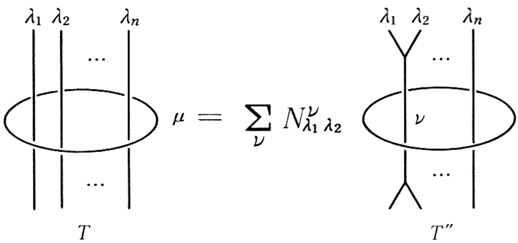


図 2.21

このようにして得られた 3 次元多様体の位相不変量 $Z_k(M)$ を Lie 環 $sl_2(\mathbb{C})$ に付随した，レベル k の **Witten 不変量**とよぶ．Witten 不変量の簡単な計算例をあげておこう．3 次元球面 S^3 に対しては，定義よりただちに，

$$Z_k(S^3) = S_{00}$$

となることがわかる．また，直積 $S^1\times S^2$ については，$S^1\times S^2$ が，S^3 内のフレーミング 0 の自明な結び目にそった Dehn サージェリーで得られることから，

$$Z_k(S^1\times S^2) = 1$$

と計算される．

Witten 不変量の基本的な性質をいくつかあげておこう.

命題 2.17 3 次元多様体の連結和について,

$$Z_k(M_1 \sharp M_2) = \frac{1}{S_{00}} Z_k(M_1) Z_k(M_2)$$

が成立する.

［証明］ M_1, M_2 が, それぞれ, リンク L_1, L_2 にそった Dehn サージェリーで与えられるとき, 連結和 $M_1 \sharp M_2$ は, 互いに共通部分をもたない 3 次元球体 B_1, B_2 にそれぞれ含まれるようなリンク L_1, L_2 の和集合として表されるリンク L にそった Dehn サージェリーとして得られる. したがって, リンクの不変量に関する命題 2.10 をあわせることにより結論が示される. ∎

命題 2.18 M の向きを逆にした多様体を $-M$ とかくと,

$$Z_k(-M) = \overline{Z_k(M)}$$

が成立する.

［証明］ M がリンク L にそった Dehn サージェリーで与えられるとき, $-M$ は, L の鏡像にそった Dehn サージェリーで得られることと, 命題 2.11 からただちに示される. ∎

ここでは, 共形場理論を基礎にして Witten 不変量 $Z_k(M)$ を構成したが, Reshetikhin–Turaev [43]では, 量子群のパラメータが 1 のベキ根における表現論を用いて, Witten 不変量の Dehn サージェリーによる記述がなされている.

これまでの構成を, 3 次元多様体がリンクを含む場合に拡張することもできる. L を, 3 次元多様体 M 内の, 向きとフレーミングの与えられたリンクとする. L の成分を $L_1, \cdots, L_n$ として, これらに, レベル k の最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を対応させる. (M, L) が, (S^3, L') のフレーミングの与えられたリンク $N = N_1 \cup \cdots \cup N_m$ にそった Dehn サージェリーによって与えられているとする. ここで, リンク N は, L' とは交わらないようにとっておく. (M, L) の不変量 $Z_k(M, L; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が

$$S_{00} C^{\sigma(N)} \sum_{\mu} S_{0,\mu(1)} \cdots S_{0,\mu(m)} J(L' \cup N; \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu(1), \cdots, \mu(m))$$

によって定まる．ここで，和は，N の成分に与えられるレベル k の最高ウエイト $\mu:\{1,\cdots,m\}\to P_+(k)$ すべてに関してとる．

§2.4　写像類群の射影表現と位相的場の理論

前節で構成した 3 次元多様体の Witten 不変量 $Z_k(M)$ は，Dehn サージェリーという 3 次元多様体の表示を用いるものであった．実は，理論の枠組みをもう少し広げておくと，Atiyah の意味の 2+1 次元の**位相的場の理論**(topological quantum field theory)の例を構成できることを説明する．まず，一般的に，Atiyah の意味の $d+1$ 次元の位相的場の理論の公理をあげておこう．$d+1$ 次元の位相的場の理論とは，次の性質をもつファンクター Z をいう．

(1)　コンパクトで，境界のない，向きのついた d 次元微分多様体 Σ に対して，有限次元複素線形空間 Z_Σ が対応する．

(2)　コンパクトで，向きのついた $d+1$ 次元微分多様体 Y で，$\partial Y=\Sigma$ となるものに対して，ベクトル $Z(Y)\in Z_\Sigma$ が定まる．

さらに，Z は，以下の性質(A1)–(A5)を満たすことを要請する．

(A1)　Σ の向きを反対にした多様体を $-\Sigma$ で表すと，$Z_{-\Sigma}=Z_\Sigma^*$ が成立する．ここで，Z_Σ^* は，Z_Σ の $\mathbb{C}$ 上の線形空間としての双対空間である．

(A2)　共通部分をもたない和集合 $\Sigma_1\sqcup\Sigma_2$ について，$Z_{\Sigma_1\sqcup\Sigma_2}=Z_{\Sigma_1}\otimes Z_{\Sigma_2}$ が成立する．

上の(A1)と(A2)より，$\partial Y=(-\Sigma_1)\sqcup\Sigma_2$ を満たすコンパクトで，向きのついた $d+1$ 次元微分多様体 Y に対して，線形写像 $Z(Y)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Z_{\Sigma_1},Z_{\Sigma_2})$ が定まる．このような Y は，Σ_1 と Σ_2 の間の**コボルディズム**(cobordism)とよばれる．

(A3)　コボルディズムの合成 $\partial Y_1=(-\Sigma_1)\sqcup\Sigma_2$, $\partial Y_2=(-\Sigma_2)\sqcup\Sigma_3$ に対して，

$$Z(Y_1\cup Y_2)=Z(Y_2)Z(Y_1)$$

が成立する．

（A4）　$Z(\varnothing)=\mathbb{C}$ が成立する．

（A5）　I を単位区間とすると，$Z(\Sigma\times I)$ は，Z_Σ の線形変換として，恒等写像である．

Z は，コンパクトで，境界のない，向きのついた d 次元微分多様体と，その間のコボルディズムのカテゴリーから，複素線形空間とその間の線形写像のカテゴリーへのファンクターとみなすことができる．公理のいくつかの帰結を述べておこう．(A3)と(A5)から，Σ の向きを保つ微分同相写像全体のなす群 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ が，Z_Σ に線形に作用することがわかる．とくに，Y が境界のない多様体のときは，$Z(Y)$ は，複素数として定まる．これは，次のように求めることもできる．Y を d 次元多様体 Σ で切り開いて，2つの境界付き多様体 Y_+, Y_- の和集合に，$\partial Y_+=\Sigma=-\partial Y_-$ となるように分解すると，$Z(Y_+)\in Z_\Sigma$，$Z(Y_-)\in Z_\Sigma^*$ が定まり，$Z(Y)$ は，Z_Σ と Z_Σ^* の自然なペアリングを用いて，

$$Z(Y)=\langle Z(Y_+), Z(Y_-)\rangle$$

で与えられる．(A3)により，これは，分解の方法によらずに，一意に定まる．$f\in\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ によって，$\Sigma\times I$ の境界 $\Sigma\times\{0\}$ と $\Sigma\times\{1\}$ をはりあわせて得られる多様体を Σ_f で表すと，f の Z_Σ への作用 $\rho(f)$ を用いて，$Z(\Sigma_f)=\mathrm{Tr}\,\rho(f)$ が得られる．とくに，f を恒等写像として，

$$\dim Z_\Sigma = Z(\Sigma\times S^1)$$

となることがわかる．

この節の目標は，共形場理論のホロノミーをトレースすることによって構成される Jones–Witten 理論が，$d=2$ の場合に位相的場の理論の例になっていることを説明することである．ただし，上の Atiyah の公理は，おおまかな枠組みであって，実際の理論においては，いくつかの修正を必要とする．とくに，$\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ の作用が，線形表現ではなく，射影表現になっている点は重要で，これについては，後に詳しく解説する．

2.2 節で，n 個の S^1 と同相な境界をもつ種数0の曲面の写像類群 $\mathcal{M}_{0,n}$ が，共形ブロックの空間に線形に作用することを示した．ここでは，この方法を拡張して，一般の種数の曲面の写像類群の表現を構成する．Σ を種数 g の向

きのついた閉曲面とする．Σ の向きを保つ微分同相写像全体 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ の要素 h, h' に対して，同値関係 $h \sim h'$ を，h と h' が，互いにイソトープであることとして定め，$\mathcal{M}_g$ を，この同値関係によって類別した集合 $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\sim$ とおく．$\mathcal{M}_g$ は，微分同相写像の合成に関して群になり，これを，Σ の**写像類群**(mapping class group)とよぶ．

種数 g の閉曲面 Σ に対して，複素線形空間 V_Σ を次のように構成する．基本的な考え方は，Σ をハンドル体 H の境界として実現して，図 2.22 に示したように，ハンドル体に含まれる 2 次元円板を境界とする閉曲線 $C_1, \cdots, C_g$ によって，曲面 Σ を切り開いて，2.2 節で述べた，種数 0 の場合の構成を用いることである．この節でも，Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，$sl_2(\mathbb{C})$ の場合を扱う．

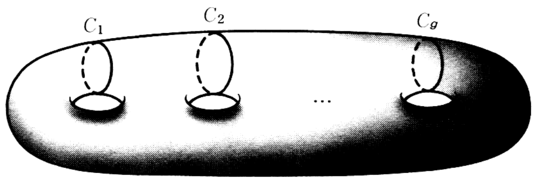


図 2.22　種数 g の閉曲面を曲線 $C_1, \cdots, C_g$ で切り開く．

複素平面の実軸上に，$2g$ 個の点 $p_1, p_2, \cdots, p_{2g-1}, p_{2g}$ を，その座標が，$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{2g-1} < z_{2g}$ を満たすようにとる．正の整数 k を固定して，これらの点に，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の最高ウエイト $\mu_1, \mu_1^*, \cdots, \mu_g, \mu_g^*$ を対応させる．2.2 節と同じように，λ^* は，$\mathcal{H}_\lambda$ の双対表現 $\mathcal{H}_\lambda^*$ を対応させることを意味する．さらに，原点に $\mathcal{H}_0$，無限遠点に，その双対表現 $\mathcal{H}_0^*$ を対応させる．これに対して定義される共形ブロックの空間は，1.4 節でも示したように，不変テンソルの空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\mu_1} \otimes V_{\mu_1}^* \otimes \cdots \otimes V_{\mu_g} \otimes V_{\mu_g}^*, \mathbb{C})$$

に，自然に埋め込むことができる．この埋め込みによる，共形ブロックの空間の像を $V_{\mu_1\mu_1^*\cdots\mu_g\mu_g^*}$ で表し，

$$V_\Sigma = \bigoplus_{\mu_1, \mu_1^*, \cdots, \mu_g, \mu_g^* \in P_+(k)} V_{\mu_1\mu_1^*\cdots\mu_g\mu_g^*}$$

とおく．ここで，$P_+(k)$ は，レベル k の最高ウエイトの集合で，最高ウエイトを整数で表すと $P_+(k)=\{0,1,\cdots,k\}$ であった．V_Σ の基底を，図 2.23 のように，各辺にレベル k の最高ウエイトが与えられて，それぞれの頂点のまわりに集まる辺に対応したウエイトが，命題 1.15 で述べたレベル k の Clebsch–Gordan 条件を満たすような，グラフ Γ で表す．曲面 Σ は，$\mathbb{R}^3$ における，Γ の正則近傍の境界として実現されている．

写像類群の要素で，図 2.24 のように，ある閉曲線 C にそって曲面を切り開き，2π ひねってはりなおす操作に対応する微分同相写像を，C にそった **Dehn のひねり**(Dehn twist)とよび，そのイソトピー類を τ_C で表す．Lickorish によって，写像類群 $\mathcal{M}_g$ は，図 2.24 に示した $3g-1$ 本の曲線 α_i,β_i，$1\leqq i\leqq g$，δ_j，$2\leqq j\leqq g$ にそった Dehn のひねりで生成されることが知られている．

Verlinde 等式(命題 1.22)を用いると

$$\dim V_\Sigma = \sum_{\lambda\in P_+(k)} \left(\frac{1}{S_{0\lambda}}\right)^{2g-2}$$

と計算される．前節で述べた Witten 不変量の構成を，境界のある 3 次元多様体に拡張することによって，写像類群 $\mathcal{M}_g$ の V_Σ への作用を定義することができることを示そう．そのための準備とてして，次のような構成をする．まず，図 2.23 のように，$\mathbb{R}^2\times I$ 内に，それぞれ，種数 g の閉曲面から上のように構成されたグラフ Γ_1,Γ_2 を配置する．Γ_1,Γ_2 の正則近傍として得られるハンドル体を，それぞれ，H_1, H_2 とおく．写像類群 $\mathcal{M}_g$ の要素 h に対して，H_1 と $-H_2$ を $h:\partial H_1\to\partial H_2$ によってはりあわせて得られる 3 次元多様体を M とおく．また，$\mathbb{R}^2\times I\subset\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ とみなして，Dehn サージェリーによって M が得られるような，フレーミングのついたリンク L を $\mathbb{R}^2\times I$ 内に，Γ_1, Γ_2 と交わらないようにとる．具体的には h を Lickorish の生成元の積として表し，それぞれの Dehn のひねりに，図 2.24 下のように $(2g,2g)$ タングルを対応させる．さらに，Dehn のひねりの積にタングルの合成を対応させて，得られるリンクを $L(h)$ とかく．

グラフ Γ_1, Γ_2 および，フレーミングのついたリンク $L(h)$ をあわせて，

2.2 節で定義した意味の $(2g,2g)$ タングルとみなす．このタングルを T とかくことにする．リンク $L(h)$ に向きを与え，図 2.23 のように，ウエイト $\mu_1,\cdots,\mu_g,\ \nu_1,\cdots,\nu_g$ を与えると，リンク $L(h)$ の各成分に対するウエイト λ: $\{1,2,\cdots,m\}\to P_+(k)$ を与えるごとに，2.2 節で構成したように，タングル作用素として，線形写像

$$J(T;\lambda)_{\mu\nu} : V_{\mu_1\mu_1^*\cdots\mu_g\mu_g^*} \longrightarrow V_{\nu_1\nu_1^*\cdots\nu_g\nu_g^*}$$

が得られる．これを用いて，

$$\rho(h)_{\mu\nu} = \sqrt{S_{0\mu_1}\cdots S_{0\mu_g}}\sqrt{S_{0\nu_1}\cdots S_{0\nu_g}}$$
$$\times C^{\sigma(L(h))}\sum_{\lambda} S_{0,\lambda(1)}\cdots S_{0,\lambda(m)}J(T;\lambda)_{\mu\nu}$$

とおく．記号は，前節の Witten 不変量の定義と同様である．このように，λ に関する和をとると，リンクの向きの選び方にはよらない．さらに，

$$\rho(h) : V_\Sigma \longrightarrow V_\Sigma$$

を $\rho(h)=\bigoplus_{\mu\nu}\rho(h)_{\mu\nu}$ で定義する．このようにして，写像 $\rho:\mathcal{M}_g\to GL(V_\Sigma)$ が定まる．Witten 不変量が Kirby の操作で不変であることを示した前節の議論と同様に，$\rho(h)$ は，h を Lickorish の生成元の積として表す方法にはよらず，$h\in\mathcal{M}_g$ によって定まることがわかる．

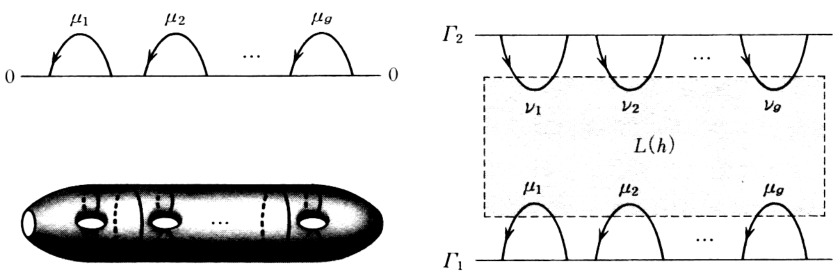


図 2.23　グラフの正則近傍の境界として表される曲面は，3 つの穴のあいた球面の和に分解される．

写像類群 $\mathcal{M}_g$ の要素 x,y に対して，上のように，$(2g,2g)$ タングル $T(x)$, $T(y),T(xy)$ を対応させて，それぞれに現れるリンク $L(x),L(y),L(xy)$ について，

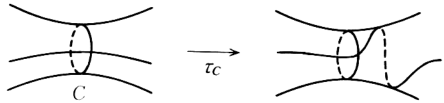
$$\xi(x,y)=C^{\sigma(xy)-\sigma(x)-\sigma(y)}$$

とおく．以上の議論から，次の命題が示される．

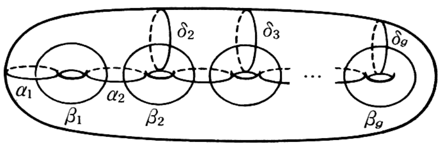
命題 2.19　上で定めた $\rho:\mathcal{M}_g\to GL(V_\Sigma)$ は，

$$\rho(xy)=\xi(x,y)\rho(x)\rho(y)$$

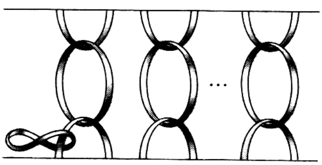
を満たす．つまり，ρ は 2–コサイクル ξ に関する射影表現である．　□



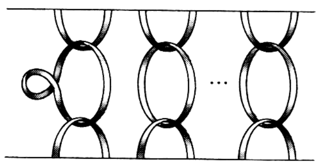
曲線 C にそった Dehn のひねり



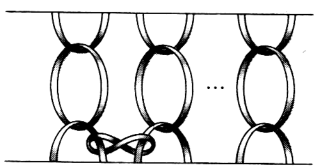
写像類群の Lickorish による生成元



α_1



β_1



α_2

写像類群の生成元のタングル表示

図 2.24

ここで，ξ は，$\mathbb{C}^*$ に値をとる $\mathcal{M}_g$ の 2–コサイクルである．すなわち，ξ は，

$$\xi(xy,z)\xi(x,y)=\xi(x,yz)\xi(y,z)$$

を満たす．これは，$\rho((xy)z)=\rho(x(yz))$ よりただちに得られる．

$g=1$ の場合，写像類群 $\mathcal{M}_1$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ と同型である．このとき，辺にウエイト λ を与えたグラフ Γ に対応する V_Σ の基底を v_λ で表すと，この基底に関して，$SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元 S,T の作用は，それぞれ，$S_{\lambda\mu}$ および Δ_λ を用いて，

$$Sv_\lambda=\sum_\mu S_{\lambda\mu}v_\mu \tag{2.28}$$

$$Tv_\lambda=\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_\lambda\bigr)v_\lambda \tag{2.29}$$

と表されることがわかる．実際，変換 S に関する結果は，2.3 節で述べた Hopf リンクについての命題 2.15 から，また，変換 T に関する結果は，2.2 節で述べたリンクのフレーミングについての命題 2.6 から，それぞれ得られる．これを，$SL_2(\mathbb{Z})$ のトーラスの共形ブロックの空間への作用を Verlinde 基底で記述したものと比較すると，C のベキの違いをのぞいて，一致していることがわかる．

命題 2.19 の写像類群の射影表現のいくつかの性質を見ておこう．V_Σ については，2.1 節で説明したように，図 2.2 の操作をくりかえすことにより，別のグラフに対応した基底を与えることができる．これらの基底の間の変換行列は，KZ 方程式の接続行列によって与えられるのであった．図 2.23 のように，グラフの正則近傍として，ハンドル体を実現して，閉曲面をその境界と考えると，グラフの辺 e と横断的に交わる 2 次元円板の境界 $C(e)$ についての，Dehn のひねりが，その基底について，対角化されていることがわかる．$C(e)$ の固有値は，辺 e に与えられたウエイト $\lambda(e)$ を用いて，$\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_{\lambda(e)})$ で与えられる．例えば，図 2.23 に示した基底に対して，$\alpha_1,\delta_2,\cdots,\delta_g$ の作用は対角化されている．

ここで構成した写像類群の射影表現と 3 次元多様体の Witten 不変量との関係を説明しよう．一般に，M をコンパクトで境界のない向きのついた 3

次元多様体とする．M は，ある種数のハンドル体 H_g を用いて，$M=H_g\cup_h(-H_g)$ と表せることが知られている．ここで，$h\in\mathcal{M}_g$ は，H_g の境界をはりあわせる写像 $h:\partial H_g\to\partial H_g$ である．このような3次元多様体の分解を **Heegaard 分解**(Heegaard splitting)とよぶ．Heegaard 分解の存在は，3次元多様体の単体分割とその双対分割を考え，それぞれについて，0単体と1単体からなる部分複体の正則近傍をとることにより示すことができる．Heegaard 分解を用いると，$Z_k(M)$ は，次のように表すことができる．まず，図2.23のグラフで表される V_Σ の基底のうち，すべての辺にウエイト0を与えたグラフに対応するベクトルを v_0 とおく．次の命題が成立する．

命題 2.20　$M=H_g\cup_h(-H_g)$ を Heegaard 分解とすると，M の Witten 不変量は，命題2.19の射影表現 ρ を用いて，

$$Z_k(M)=S_{00}^{-g+1}\langle v_0^*,\rho(h)v_0\rangle$$

と表される．ここで，v_0^* は，v_0 の双対基底で，$\langle\ ,\ \rangle$ は，V_Σ とその双対空間の間の自然なペアリングである．　□

写像類群 $\mathcal{M}_g$ の要素 h に対して，図2.25のように，ハンドル体 H_g に1-ハンドルを付け加えて H_{g+1} をつくり，曲線 α を β に移すような微分同相によって，h を ∂H_{g+1} の微分同相にイソトピーをのぞいて拡張した $\mathcal{M}_{g+1}$ の要素を $\tilde{h}$ で表す．Heegaard 分解 $H_{g+1}\cup_{\tilde{h}}(-H_{g+1})$ によって与えられる3次元多様体は，$M=H_g\cup_h(-H_g)$ に S^3 を連結和したものであり，M と同相である．上の操作のくり返しと，ハンドル体の微分同相に拡張される写像類群の要素の合成によって，互いに移りあう Heegaard 分解は，**安定同値**(stably equivalent)であるという．安定同値な Heegaard 分解に対して，実際に，命題2.20で与えられた式の右辺が等しくなることは，

$$\langle v_0^*,\rho(\tilde{h})v_0\rangle=S_{00}\langle v_0^*,\rho(h)v_0\rangle$$

が成立することと，ハンドル体の微分同相に拡張される写像類群の要素は v_0 に自明に作用することから，確かめることができる．

一般に，3次元多様体 M 上に Morse 関数を考えて，M を閉曲面の間のコボルディズムに分解する．このような状況で Morse 関数の正則値の逆像として表される曲面 Σ について，ハンドル体の境界としての構造を付加して

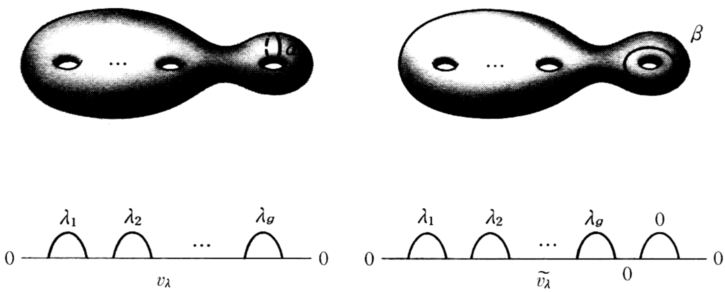


図 2.25

おく．Σ に対して，複素線形空間を対応させて，Atiyah の意味の 2+1 次元を構成することを試みる．ここで，基本的なコボルディズムは写像類群 $\mathcal{M}_g$ によるハンドル体の境界のはりあわせと，ハンドルを付け加える操作，および，その逆である．Σ の種数が g のとき，Σ に対応する線形空間としては，上で定義した $V_\Sigma = \bigoplus_{\mu_1, \mu_1^*, \cdots, \mu_g, \mu_g^* \in P_+(k)} V_{\mu_1 \mu_1^* \cdots \mu_g \mu_g^*}$ をとる．写像類群 $\mathcal{M}_g$ の作用に関しては，命題 2.19 で説明した．例えば，1–ハンドルを付け加える操作については，$\iota : V_{\partial H_g} \to V_{\partial H_{g+1}}$ を

$$\iota(v_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{S_{00}}} \widetilde{v_\lambda}$$

で定める．ここで，$\widetilde{v_\lambda}$ は，図 2.25 のように，v_λ にループを加え，付け加えた辺に対してウエイト 0 を対応させて得られる $V_{\partial H_{g+1}}$ の要素である．また，球面 S^2 の生成については，$\beta : V_\phi \to V_{S^2}$ を $\beta(x) = \dfrac{x}{\sqrt{S_{00}}}$ で定める．ここで，$V_\phi = V_{S^2} = \mathbb{C}$ である．このようにしてコボルディズムに対して，線形写像を対応させていくと，公理(A3)が，C の適当なベキを法として成立するという修正をほどこすことによって，2+1 次元の位相的場の理論の例を構成することができる．

ここでは，詳細は述べないが，このような構成は，3 次元多様体 M がリンク L を含む場合にも拡張することができる．リンクの各成分には，フレーミングと向きがつけられていて，レベル k の最高ウエイトが与えられている

とする．この場合，切り口として現れるのは，図 2.26 のように，閉曲面 Σ と，その上の有限個の点，$p_1, \cdots, p_n$ で，これらの点には，リンクの成分の向きによって，アフィン Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の既約表現または，その双対表現が対応している．これらのウエイトを $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．やはり，Σ を，図 2.26 のグラフの正則近傍の境界として表現して，

$$V_{\Sigma, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda}} = \bigoplus_{\mu_1, \mu_1^*, \cdots, \mu_g, \mu_g^* \in P_+(k)} V_{\mu_1 \mu_1^* \cdots \mu_g \mu_g^* \lambda_1 \cdots \lambda_n}$$

とおく．この $V_{\Sigma, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda}}$ を用いて，命題 2.19 を，$\mathcal{M}_{g,n}$ の射影表現に拡張することができる．ここで，$\mathcal{M}_{g,n}$ は，n 個の S^1 に同相な境界をもつ種数 g の曲面の写像類群である．この場合も，コボルディズムに対して線形写像を対応させることができて，とくに，$M = S^3$ の場合には，これらの線形写像の合成として定義される不変量 $Z(M, L; \lambda)$ が，2.2 節で定義した $J(L; \lambda)$ を用いて，

$$Z(M, L; \lambda) = S_{00} J(L; \lambda) \tag{2.30}$$

で与えられるように，構成することができる．

とくに，図 2.26 のように，ソリッドトーラス H の中心線 K にウエイト λ が与えられた状況を考えよう．境界 $T = \partial H$ に対応するのは v_μ, $0 \leqq \mu \leqq k$ を基底とする $k+1$ 次元の線形空間 V_T である．H, K, λ から定まる V_T のベクトルを ϕ_λ とおく．補題 2.9 の自明な結び目についての結果，および上の(2.30)の条件から

$$\langle S v_0, \phi_\lambda \rangle = S_{\lambda 0}$$

となり，さらに，式(2.28)で記述される V_T への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用をあわせると，$\phi_\lambda = v_\lambda$ であることがわかる．

このような視点から定理 2.16 の $Z_k(M)$ の定義式を見直してみよう．M が S^3 の m 個の成分をもつリンク L にそった Dehn サージェリーで得られているとき，リンク L の管状近傍の外側を M_-，はりあわせるソリッドトーラスの m 個の和集合を M_+ とおく．$Z_{M_+} = Z_T^{\otimes m}$ と表される．M_- に対して，ベクトル $Z(M_-) \in (Z_T^{\otimes m})^*$ が定まる．Dehn サージェリーに現れる境界のはりあわせ写像を f として，f の $Z_T^{\otimes m}$ への作用を

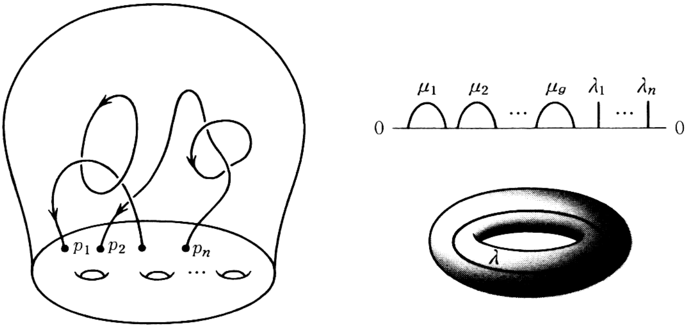


図 2.26

$$f v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_m} = \sum_{\lambda} f_{\mu\lambda} v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_m}$$

で表す．このことから，C のベキを法として，

$$Z(M) = \sum_{\lambda} f_{0\lambda} \langle Z(M_-),\ v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_m} \rangle$$

となる．ここで，$\langle Z(M_-),\ v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_m} \rangle$ は，式(2.30)から，フレーミング 0 を与えたリンク L の不変量 $S_{00}J(L;\lambda)$ となる．再び式(2.28)で記述した $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用を用いると，$Z_k(M)$ の右辺のかたちを，C のベキによる正規化をのぞいて，再現することができる．2.3 節における $Z_k(M)$ の定義は，やや唐突であったが，このようにながめると $SL_2(\mathbb{Z})$ のトーラスの共形ブロックの空間への作用から自然に記述されることがわかる．

§2.5 Chern–Simons 理論と曲面上の接続の空間の幾何

M を向きのついた 3 次元多様体とする．G を Lie 群 $SU(2)$ として，P を M 上の $SU(2)$ 主バンドルとする．$SU(2)$ は単連結なので，P は，位相的には，M 上の自明な $SU(2)$ バンドルとなる．P の接続全体の空間を $\mathcal{A}_M$ とかく．$\mathcal{A}_M$ はアフィン空間となるが，自明な接続を基点にとって，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 1 次微分形式の空間 $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視しておく．P

の**ゲージ群**(gauge group) $\mathcal{G}$ は，M から G へのなめらかな写像全体の空間 $\mathrm{Map}(M,G)$ とみなすことができる．接続の空間 $\mathcal{A}_M$ には，ゲージ群 $\mathcal{G}$ が，引き戻しによって右から作用する．この作用は，具体的には，

$$g^*A = g^{-1}Ag + g^{-1}dg, \quad A \in \mathcal{A}_M, \quad g \in \mathcal{G} \tag{2.31}$$

で与えられる．また，接続 A について，その曲率が

$$F_A = dA + A \wedge A \in \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \tag{2.32}$$

で定義される．

P の接続 $A \in \mathcal{A}_M$ に対して

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}\Bigl(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\Bigr), \quad A \in \mathcal{A}_M \tag{2.33}$$

とおき，CS を **Chern–Simons 汎関数**(Chern-Simons functional) とよぶ．

以下，M の境界は空集合であるとして，Chern–Simons 汎関数のいくつかの幾何的意味を述べよう．

命題 2.21　Chern–Simons 汎関数 $CS : \mathcal{A}_M \to \mathbb{R}$ の臨界点は，平坦接続である．

［証明］　接続の 1–パラメータ族 $A_t = A + ta$ について，$CS(A+ta)$ は，A の曲率 $F_A = dA + A \wedge A$ を用いて

$$CS(A+ta) = CS(A) + \frac{t}{4\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}(F_A \wedge a) + \mathcal{O}(t^2)$$

のかたちに表される．このことから，CS の臨界点は，$F_A = 0$ となる接続 A，つまり，平坦接続であることが示される．　∎

双一次形式 $B : \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \times \Omega^2(M, \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ を，

$$B(\alpha, \beta) = \int_M \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta)$$

によって定義すると，これは非退化で，B によって，$\Omega^2(M, \mathfrak{g})$ を $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ の双対空間とみなすことにする．接続 A に対して，その曲率 F_A を与える対応を F とかくと，$\Omega^2(M, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})^*$ により，F は，$\mathcal{A}_M$ 上の 1 次微分形式とみなすことができる．

$$dCS(A) = \frac{1}{4\pi^2}F_A \tag{2.34}$$

と表されることから，F は完全形式であることがわかる．

次に，Chern–Simons 汎関数への，ゲージ群の作用を記述する．ここでは，後の議論のために，$\partial M \neq \varnothing$ の場合もこめて考察する．

命題 2.22

$$CS(g^*A) = CS(A) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial M}\mathrm{Tr}(A \wedge dg\, g^{-1}) - \int_M g^*\sigma \tag{2.35}$$

が成立する．ここで，σ は，(1.8) で与えられる $SU(2)$ の体積要素である．

□

とくに，M の境界が空集合のときは，

$$CS(g^*A) = CS(A) - \int_M g^*\sigma \tag{2.36}$$

となる．右辺に現れる積分 $\int_M g^*\sigma$ は，$g: M \to G$ の写像度となり，つねに整数である．したがって，Chern–Simons 汎関数は，接続の空間のゲージ群による商空間からの写像

$$CS: \mathcal{A}_M/\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

を誘導する．

$\partial M \neq \varnothing$ のとき，$\partial M = \Sigma$ とおく．曲面 Σ 上の G 主束を Q とかく．ここでも，$G = SU(2)$ としているので，位相的には，Q は自明なバンドル $\Sigma \times SU(2)$ と同型である．Q の接続全体の空間を $\mathcal{A}_\Sigma$ とおくと，3 次元多様体の場合と同様に，$\mathcal{A}_\Sigma$ は，$\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ と同一視できる．また，$\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$ について，接空間 $T_\alpha\mathcal{A}_\Sigma$ は，$\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ と同型である．接空間 $T_\alpha\mathcal{A}_\Sigma$ 上には，

$$\omega(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) \tag{2.37}$$

によって，交代線形形式が与えられるが，これは $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の 2 次微分形式 ω で，非退化かつ，$d\omega = 0$ を満たすものを定める．これにより，$\mathcal{A}_\Sigma$ には，無限次元のシンプレクティック多様体の構造が入る．Q のゲージ群を $\mathcal{G}_\Sigma$ とおく．これは，なめらかな写像の空間 $\mathrm{Map}(\Sigma, G)$ とみなすことができる．以

下，$\mathcal{A}_\Sigma$ の幾何学と3次元多様体の Chern–Simons 汎関数との関係を述べる．

$\mathcal{A}_\Sigma$ の要素 a とゲージ群 $\mathcal{G}_\Sigma$ の要素 g について，接続 a の M への拡張を A，g の M へのなめらかな写像としての拡張を $\tilde{g}: M \to G$ として，

$$c(a,g) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,(CS(\tilde{g}^*A) - CS(A))\right) \tag{2.38}$$

とおく．具体的には，

$$c(a,g) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\left(\int_\Sigma \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(g^{-1}ag \wedge g^{-1}dg) - \int_M \tilde{g}^*\sigma\right)\right) \tag{2.39}$$

と表される．2番目の項は，1.3節で扱った Wess–Zumino–Witten 模型における Wess–Zumino 項であり，右辺は g の拡張 $\tilde{g}$ のとりかたによらないことがわかる．したがって，積分のかたちから，右辺は，Σ 上の a, g のみで決まることがわかる．見方をかえると，次の命題が示されたことになる．

命題 2.23 Σ を境界とする3次元多様体 M 上の Chern–Simons 汎関数に対する，ゲージ群 $\mathrm{Map}(M,G)$ の作用について，M 上の接続 A の Σ への制限 a と，$g \in \mathrm{Map}(M,G)$ の Σ への制限 $g|_\Sigma$ を用いて，

$$\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,CS(g^*A)\right) = c(a, g|_\Sigma)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,CS(A)\right) \tag{2.40}$$

が成立する． □

$\mathcal{A}_\Sigma$ の要素 a について，$L_{\Sigma,a}$ を写像 $f: \mathrm{Map}(\Sigma, G) \to \mathbb{C}$ で

$$f(e\cdot g) = c(a,g)f(e), \quad g \in \mathrm{Map}(\Sigma, G)$$

を満たすもの全体とする．$L_{\Sigma,a}$ は Hermite 内積の入った1次元複素線形空間である．命題2.23より，$\partial M = \Sigma$ のとき，M 上の接続 A に対して，A の Σ への制限を a とするとき，$\exp 2\pi\sqrt{-1}\,CS(A)$ は，$L_{\Sigma,a}$ の要素と考えるのが自然であることがわかる．Σ の向きを反対にしたものを $-\Sigma$ とかくと

$$L_{-\Sigma,a} \cong \overline{L_{\Sigma,a}}$$

が成立している．3次元多様体 M が，曲面 Σ によって，2つの部分に分けられているとする．つまり，$M = M_1 \cup M_2$ で，$\partial M_1 = \Sigma$，$\partial M_2 = -\Sigma$ とする．M 上の $SU(2)$ 接続 A を，M_1, M_2 に制限したものを，それぞれ，A_1, A_2 で表し，また，A の Σ への制限を α とかく．このとき，

$$\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,CS_{M_1}(A_1)\right) \in L_{\Sigma,\alpha}, \quad \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,CS_{M_2}(A_2)\right) \in \overline{L_{\Sigma,\alpha}}$$

が定まるが，自然なペアリング $L_{\Sigma,\alpha} \times L_{-\Sigma,\alpha} \to \mathbb{C}$ を用いて，

$$\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,CS_M(A)\bigr)=\bigl(\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,CS_{M_1}(A_1)\bigr),\ \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,CS_{M_2}(A_2)\bigr)\bigr)$$

と表すことができる．

また，$\mathcal{A}_\Sigma$ の要素からなる 1–パラメータ族 η_t，$0\leqq t\leqq 1$ を，$\Sigma\times[0,1]$ 上の接続 η と考えると，これまでの考察から，$\Sigma\times[0,1]$ 上の Chern–Simons 汎関数 $CS_{\Sigma\times[0,1]}$ によって，写像

$$\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,CS_{\Sigma\times[0,1]}(\eta)\bigr): L_{\Sigma,\eta_0}\longrightarrow L_{\Sigma,\eta_1}$$

が与えられる．$L_{\Sigma,a}$ を a 上のファイバーとする $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の位相的に自明な複素直線束を L_Σ とおくと，接続の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ の道，η_t，$0\leqq t\leqq 1$ に対して，複素直線束 L_Σ へのリフトが与えられる．このリフトを水平切断とするような複素直線束 L_Σ の接続を定めることができる．さらに，この接続の曲率形式として，$\mathcal{A}_\Sigma$ のシンプレクティック形式が再現されることがわかる．

このようにして，Chern–Simons 汎関数を用いて，接続の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ の道の，複素直線束 L_Σ へのリフトを構成することができたが，やはり，Chern–Simons 汎関数を用いて，$\mathcal{A}_\Sigma$ へのゲージ群 $\mathcal{G}_\Sigma$ の作用を，複素直線束 L_Σ に持ち上げることができる．この作用のモーメント写像 μ に対して，$\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ つまり，Marsden–Weinstein 商 $\mathcal{A}_\Sigma/\!/\mathcal{G}_\Sigma$ をとると，Σ 上の平坦 G 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_\Sigma$ とその上の複素直線束 $\mathcal{L}$ が得られる．$\mathcal{M}_\Sigma$ は，Σ の基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の G への表現の同値類の空間

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),G)/G$$

と同一視することができる．

M をコンパクトで境界のない向きの与えられた 3 次元多様体とする．また，k を整数とする．Witten による 3 次元多様体の位相不変量は，経路積分を用いて，形式的には，

$$Z_k(M)=\int\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(A)\bigr)\mathcal{D}A$$

と表される．境界のある 3 次元多様体 M について，$Z_k(M)$ のすむべき状態空間を定式化して，2+1 次元の位相的場の理論を展開するのが目標であった．$\partial M=\Sigma$ として，A を M 上の G 接続，α を A の Σ への制限とする．これまでの考察から，

$$\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(A)\bigr) \in L_{\Sigma,\alpha}$$

と考えられる．Σ に制限すると α になるような M 上の G 接続全体の空間を $\mathcal{A}_\alpha$ とかいて，形式的に，

$$Z_k(M)(\alpha) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(A)\bigr)\mathcal{D}A$$

とおくと，

$$\exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(g^*A)\bigr) = c(g,\alpha)^k \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\,CS(A)\bigr)$$

より，$Z_k(M)$ は，複素直線束 $\mathcal{L}^{\otimes k}$ のセクションを定めると考えられる．

上の平坦接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_\Sigma$ には，次のようにして，複素構造を入れることができる．Atiyah–Bott [15] で示されているように，$\mathcal{M}_\Sigma$ は，Σ 上の位相的に自明な正則 $G_{\mathbb{C}}$ 束のモジュライ空間と同一視できて，Σ の複素構造 J から導かれる複素構造が入る．$\mathcal{M}_\Sigma$ にこのように複素構造を入れたものを $\mathcal{M}_\Sigma^{(J)}$ で表す．さらに，Kähler 偏極を導入して，$\mathcal{M}_\Sigma$ 上の複素直線束 $\mathcal{L}^{\otimes k}$ の正則切断全体の空間を $\mathcal{H}_\Sigma$ とおき，これを状態空間と考える．$\mathcal{H}_\Sigma$ は，有限次元の複素線形空間となり，Σ の共形ブロックの空間と同型になることが知られている．文献[19]などを参照されたい．このようにして，Chern–Simons 理論と共形場理論との間の関連を見いだすことができる．とくに，複素線形空間としては，$\mathcal{H}_\Sigma$ は，2.4 節で構成した Z_Σ と同型になる．

次に，3 次元多様体がリンクを含む場合についてふれておく．M をコンパクトで閉じた向きの与えられた 3 次元多様体として，M がリンク $C_1\cup\cdots\cup C_r$ を含んでいるとする．C_j に Lie 群 G の表現 R_j を対応させて，

$$W_{C_j,R_j}(A) = \mathrm{Tr}_{R_j}\mathrm{Hol}_{C_j}(A)$$

とおく．ここで，右辺は，接続 A の曲線 C_j にそったホロノミーのトレースを表現 R_j についてとったものである．このとき，Witten 不変量は

$$Z_k(M;C_1,\cdots,C_r) = \int \exp\bigl(2\pi\sqrt{-1}\,k\ CS(A)\bigr)\prod_{j=1}^{r} W_{C_j,R_j}(A)\mathcal{D}A \tag{2.41}$$

で与えられる．上の経路積分に対応した状態空間は，パラボリックベクトル束のモジュライ空間の理論によって定式化される．

《要約》

2.1　KZ 方程式のモノドロミー表現として現れる，組みひも群の表現の構造を調べ，特別な場合に，岩堀–Hecke 代数を経由する表現が得られることを示した．

2.2　共形ブロックの空間のホロノミーを用いて，Jones 多項式の 1 のベキ根における特殊値が得られることを示した．

2.3　3 次元多様体の Witten 不変量を，共形場理論の立場から構成した．さらに，Atiyah の意味の位相的場の理論の例が与えられることを示した．

2.4　境界のある 3 次元多様体の Chern–Simons 汎関数によって，曲面上の接続の空間上の複素直線束とその接続が定まることを示した．

3 Chern–Simons 摂動理論

この章では，Chern–Simons 汎関数の分配関数を，その臨界点である平坦接続のまわりで摂動展開することによって構成される位相不変量について述べる．まず，結び目の Vassiliev 不変量を定式化し，これを反復積分によって表示する，Kontsevich 積分について説明する．また，Chern–Simons 汎関数の臨界点のまわりでの挙動を調べ，Hessian と Ray–Singer トーションの関係を述べる．これにより，Witten 不変量 $Z_k(M)$ の $k \to \infty$ における，漸近展開の主要項のかたちが示唆される．Feynman ダイアグラムによる，漸近展開について，まず，有限次元の場合のアナロジーを説明し，Axelrod–Singer によって構成された，Chern–Simons 摂動理論による 3 次元多様体の位相不変量を記述する．

§3.1 結び目の Vassiliev 不変量と Kontsevich 積分

Vassiliev 不変量は，結び目全体の空間のコホモロジーの研究の過程で導入されたものである．S^1 から S^3 へのなめらかな写像全体の空間を $\mathcal{M}$ とおく．Σ を，$f \in \mathcal{M}$ で，埋め込みではないもの全体からなる $\mathcal{M}$ の部分集合とする．補集合 $\mathcal{M} \backslash \Sigma$ は，向きのついた結び目全体の空間とみなすことができる．$\mathcal{M} \backslash \Sigma$ の連結成分が，結び目のタイプと対応している．0 次元コホモロジー $H^0(\mathcal{M} \backslash \Sigma, \mathbb{C})$ は，$\mathbb{C}$ に値をとる，向きのついた結び目の位相不変量全

体の空間とみなすことができる．文献[12]で展開されている Vassiliev のアイデアは，結び目を多項式写像で近似して，Alexander 双対性を用いることにより，$\mathcal{M}\backslash\Sigma$ のコホモロジーの計算を Σ のコホモロジーの計算に帰着するというものである．Σ は特異点をもつ結び目の集合とみなすことができるので，その特異性の度合いからくるフィルター付けに関するスペクトル系列を計算するというのがおおまかな考え方である．ここでは，Vassiliev の理論を完全に展開する余裕はないので，Vassiliev のスペクトル系列の E_1 項に現れる，いわゆる，有限オーダーの不変量を組合せ的に定式化することにする．

Σ の要素 $f:S^1\to S^3$ で，ちょうど m 個の横断的な 2 重点をもつもの全体を $\mathcal{S}_m$ とかく．ここで，横断的とは，2 重点を通る 2 本の曲線の接ベクトルが一次独立であることとする．

S^3 内の向きのついた結び目の複素数に値をとる位相不変量 v が，オーダー m の **Vassiliev 不変量**であることを次のように定義する．結び目 K の射影図式の n 個の交差に注目して，$\epsilon_j=\pm1$, $j=1,\cdots,n$ に応じて，これらの交差を正または負にして得られる結び目を $K_{\epsilon_1\cdots\epsilon_n}$ と書く．$n>m$ ならば，常に

$$(3.1)\qquad \sum_{\epsilon_j=\pm1,\ j=1,\cdots,n}\epsilon_1\cdots\epsilon_n\ v(K_{\epsilon_1\cdots\epsilon_n})=0$$

を満たしているとき，v をオーダー m の Vassiliev 不変量とよぶ．2 重点をもつ結び目のことばを用いると，この概念は，次のように述べることもできる．$\mathcal{S}_m$ の要素 f について，m 個の 2 重点を $\epsilon_j=\pm1$ に応じて正または負の交差でおきかえて得られる結び目を上と同様に，$K_{\epsilon_1\cdots\epsilon_m}$, $\epsilon_j=\pm1$, $j=1,\cdots,m$ で表して，$v:\mathcal{M}\backslash\Sigma\to\mathbb{C}$ を，式(3.1)の左辺の値によって $\bigcup_{n\geqq1}\mathcal{S}_n$ 上に拡張する．このとき，v がオーダー m の Vassiliev 不変量であることは，$n>m$ ならば，v が，$\mathcal{S}_n$ 上，つねに 0 であることと同値である．

オーダー m の Vassiliev 不変量全体のなす線形空間を V_m と書く．$V_m\subseteqq V_{m+1}$ となるので，線形空間の増大列

$$\mathbb{C}=V_0\subseteqq V_1\subseteqq V_2\subseteqq\cdots\subseteqq V_m\subseteqq V_{m+1}\subseteqq\cdots$$

が得られる．後に説明するように，実際には，$V_0=V_1$ となっていて，オー

ダー 1 の Vassiliev 不変量は，自明なものしか存在しないことがわかる．

向きのついた円周上に，図 3.1 のように，$2m$ 個の点をとりこれらの 2 つずつを点線で結んだ図を**コードダイアグラム**(chord diagram)とよぶ．コードダイアグラムは，円周の向きを保つ位相同型で移りあうものは同一視して考える．一般に，v が，オーダー m の Vassiliev 不変量であるとすると，m 本の弦からなるコードダイアグラムに対して，次にようにして，ある値を定める．図 3.1 上のように，コードダイアグラム Γ の，点線で結ばれている 2 点を同一視して m 個の横断的な 2 重点をもつ S^1 のはめこみが得られる．上で説明したように，v を 2 重点をもつ結び目に対して拡張することにより，得られる値を $w(\Gamma)$ とおく．このとき，コードダイアグラムに対応する S^1 のはめこみは一意には定まらないが，v がオーダー m であることから，$w(\Gamma)$ は，m 個の 2 重点以外の交差の上下にはよらず，コードダイアグラムのみによって確定することに注意しよう．m 本の弦をもつコードダイアグラム全体と，一対一に対応する基底をもつ複素ベクトル空間を $\mathcal{D}_m$ とかく．上の構成により，線形写像

$$w : V_m \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_m, \mathbb{C})$$

が得られた．この w に対して，成立する関係式を述べるために，いくつか記号を準備しよう．図 3.1 に示したように，円周上の矢印で示した円弧を端点とする弦について，4 通りの位置関係を考え，これら以外の弦は一致しているようなコードダイアグラムを，それぞれ，S_1，S_2，S_3，S_4 で表す．ただし，矢印で示した円弧を端点とする弦は，これら以外にはないとしている．また，図 3.1 下のように，円周上のとなりあう 2 点を結ぶ弦をもつダイアグラムを，孤立した弦をもつコードダイアグラムとよぶ．

命題 3.1 オーダー m の Vassiliev 不変量 v に対して，$w(v)$ は次の関係式を満たす．

(3.2) $$\sum_{i=1}^{4}(-1)^i w(v)(S_i) = 0$$

(3.3) S が孤立した弦をもてば，$w(v)(S) = 0$

［証明］ 関係式(3.2)については，式(3.1)にしたがって，$w(v)(S_i)$ を，そ

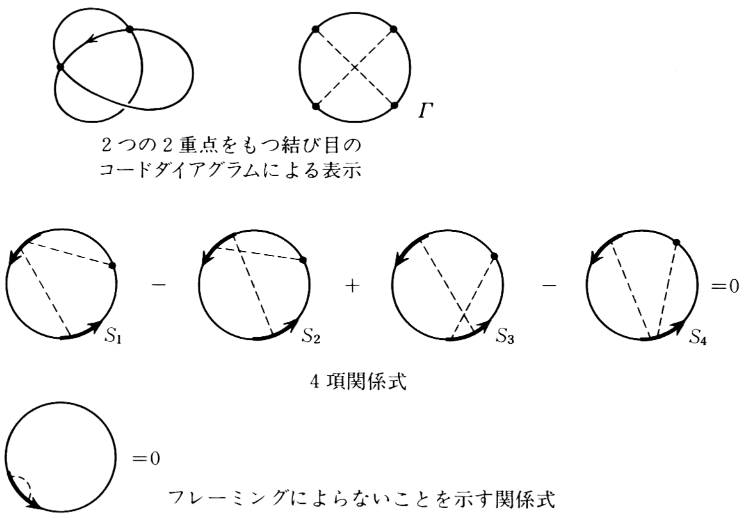


図 3.1

れぞれ2つの2重点を正の交差点と，負の交差点に置き換えて得られる4通りの図式に対する $w(v)$ の値の交代和で表すことにより，ただちに示される．関係式(3.2)は，不変量 v が，結び目の不変量であり，フレーミングによらないことから示される． ∎

関係式(3.2)は，**4項関係式**(4 term relation)とよばれる．線形空間 $\mathcal{D}_m$ を，命題3.1に現れる2通りの関係式の左辺で生成される部分空間でわって得られる空間を $\mathcal{A}_m$ で表す．命題3.1より，上の構成から，単射

$$V_m/V_{m-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_m, \mathbb{C}) \tag{3.4}$$

が得られる．このことから，とくに，V_m/V_{m-1} は，有限次元の複素線形空間であることがわかる．また，弦が1本のコードダイアグラムは，孤立した弦をもつので，$\mathcal{A}_1=0$ となり，$V_0=V_1$ となることも確かめられる．

Kontsevich は，反復積分によってこの逆写像を構成し，(3.4)が同型であることを示した．以下，Kontsevich の反復積分について述べよう．ここでは，Kontsevich の反復積分は，組みひもに対する Chen の反復積分の自然な一般化であるという視点から説明する．2.1節と同様に，複素平面 $\mathbb{C}$ の相異

なる n 個の点の配置の空間を $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ とおく．$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上の微分形式 ω_{ij} を

$$\omega_{ij} = d\log(z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}, \quad i \neq j$$

で定める．さらに，2.1 節と同じ状況で，複素パラメータ κ に対して

$$\omega = \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \Omega_{ij} \omega_{ij}$$

とおき，全微分方程式

$$d\Phi = \omega\Phi \tag{3.5}$$

を考える．KZ 方程式のモノドロミー表現は，ω の定める接続のホロノミーとして得られるが，そのひとつの表示は，Chen の反復積分の和によって与えられる．すなわち，全微分方程式(3.5)を道 $\gamma(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ にそって積分方程式に直して逐次反復法によって解くと，$\Phi(\gamma(0)) = I$ を満たす全微分方程式(3.5)の解は，

$$J_m(\gamma) = \int_\gamma \underbrace{\omega \cdots \omega}_{m} \tag{3.6}$$

を用いて

$$\Phi(\gamma(1)) = I + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\gamma) \tag{3.7}$$

と表すことができる．ここで，$J_m(\gamma)$ は m 階の**反復積分**(iterated integral)で，次のように定義される．一般に，$\omega_1, \cdots, \omega_m$ を 1 次微分形式として，これらの，道 γ による引き戻しを $\alpha_1(t)dt, \cdots, \alpha_m(t)dt$, $0 \leqq t \leqq 1$ とかくとき，反復積分は

$$\int_\gamma \omega_1 \cdots \omega_m = \int_{0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_m \leqq 1} \alpha_1(t_1) \cdots \alpha_m(t_m)\, dt_1 \cdots dt_m \tag{3.8}$$

で定義される．

KZ 接続の曲率が 0 であることは，Ω_{ij} の間の関係式

$$[\Omega_{ij} + \Omega_{jk}, \Omega_{ik}] = 0 \quad (i, j, k \text{ は互いに異なる}) \tag{3.9}$$

(3.10)　$$[\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] = 0 \quad (i,\ j,\ k,\ l\ \text{は互いに異なる})$$

によって保証されるのであった．このことに注目して，非可換な形式的な変数 X_{ij}, $1 \leqq i \neq j \leqq n$ を導入して，KZ 方程式のモノドロミー表現のユニバーサルな形を反復積分を用いて，ベキ級数として表示しよう．まず，変数 X_{ij}, $1 \leqq i \neq j \leqq n$ で $\mathbb{C}$ 上の非可換な形式的ベキ級数環を，$X_{ij} - X_{ji}$ と

(3.11)　$$[X_{ij} + X_{jk}, X_{ik}] \quad (i,\ j,\ k\ \text{は互いに異なる})$$

(3.12)　$$[X_{ij}, X_{kl}] \quad (i,\ j,\ k,\ l\ \text{は互いに異なる})$$

で生成される両側イデアルでわって得られる $\mathbb{C}$ 代数を A_n とおく．κ をパラメータとして，A_n に値をとる 1 次微分形式

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} X_{ij} \omega_{ij}$$

を考える．式(3.7)と同様にして，

$$\tilde{\theta}(\gamma) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma} \underbrace{\tilde{\omega} \cdots \tilde{\omega}}_{m}$$

とおくと，(3.11), (3.12)より，$\tilde{\omega}$ が平坦接続を定めるので，$\tilde{\theta}(\gamma)$ は，γ のホモトピー類のみによることになり，純組みひも群 P_n からの準同型写像

$$\tilde{\theta} : P_n \longrightarrow A_n$$

が得られる．ここで，$\gamma \in P_n$ に対して，$\tilde{\theta}(\gamma)$ は，変数 X_{ij} についてのベキ級数となり，その係数は，対数微分形式 ω_{ij} の反復積分で与えられる．また，KZ 方程式のモノドロミー表現は，変数 X_{ij} に，行列 Ω_{ij} を代入することにより得られる．その意味で，$\tilde{\theta}$ は KZ 方程式のモノドロミー表現のユニバーサルな表示と理解することもできる．また，接続の曲率が 0 であるために必要であった関係式(3.9)は，Vassiliev 不変量の議論に登場した，4 項関係式と本質的に同じものであることもわかる．

$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ の道 $\gamma(t) = (z_1(t), \cdots, z_n(t))$ による，微分形式 ω_{ij} の引き戻しを

(3.13)　$$\omega_{ij}(t) = \frac{dz_i(t) - dz_j(t)}{z_i(t) - z_j(t)}$$

で表す．上の $\tilde{\theta}(\gamma)$ の反復積分表示を具体的にかくと

$$(3.14)\quad \sum_{m=0}^{\infty}\int_{0\leqq t_1\leqq t_2\leqq\cdots\leqq t_m\leqq 1}\frac{1}{\kappa^m}\sum_P X_{i_1j_1}\cdots X_{i_mj_m}\bigwedge_{k=1}^{m}\omega_{i_kj_k}(t_k)$$

と表される．ここで，$P=(i_1j_1,\cdots,i_mj_m)$ は，$1\leqq i_1<j_1\leqq n$，$\cdots$，$1\leqq i_m<j_m\leqq n$ を満たすすべての組 $(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)$ をわたる．

Kontsevich は，この表示を結び目の場合に拡張して，結び目の Vassiliev 不変量のユニバーサルな積分表示を得た．図 3.2 のように $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 内の向きのついた結び目 K を考える．$\mathbb{R}$ 方向の座標関数を t として，結び目 K 上，関数 t の臨界点は，すべて非退化であると仮定する．つまり，高さの関数が結び目 K の上の Morse 関数になっているとする．高さ関数 t についての極大点，極小点をむすぶ曲線を $z_i(t)$ と表す．図 3.2 では，$i=1,\cdots,4$ である．反復積分

$$(3.15)\quad Z_m(K)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m}\int_{t_1<t_2<\cdots<t_m}\sum_P(-1)^{\epsilon(P)}D_P\bigwedge_{k=1}^{m}\omega_{i_kj_k}(t_k)$$

を考える．ここで，$P=(i_1j_1,\cdots,i_mj_m)$ は，$t_1<\cdots<t_m$ それぞれのレベルで 2 本ずつ曲線 $z_i(t)$ を選ぶ方法を表し，和はこのような選び方すべてにわたってとる．各々の P は，図 3.2 のように m 本の弦からなるダイアグラム D_P に対応しているがこれを関係式(3.2),(3.3)を法として $\mathcal{A}_m$ の元と考える．また，$\epsilon(P)$ は，P に現れる点線の端点で K の向きが下向きになっているものの個数を示す．積分(3.15)は，$\mathcal{A}_m$ の要素とみなしていて，**Kontsevich 積分**とよばれる．

補題 3.2 積分(3.15)は，$\mathcal{A}_m$ の要素として収束し，結び目の水平方向のイソトピーによる移動に関して不変である． □

この積分は，(3.3)の関係式から，極大点，極小点で発散せず，つねに有限の値になる．また，4 項関係式(3.2)は KZ 方程式の可積分条件(3.9)に対応していることから結び目を水平方向に動かしても値は変わらない．

$$(3.16)\quad Z(K)=\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(K)\in\prod_{m=0}^{\infty}\mathcal{A}_m$$

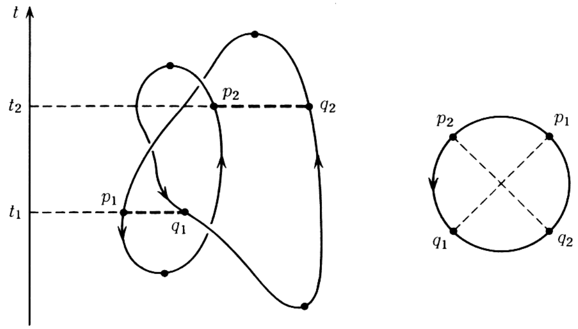


図 3.2

とおく．ここで $\prod_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m$ は無限直積を表す．このままでは，図 2.11 の 2 つの臨界点のキャンセルの操作に関して不変でないので，2.2 節の議論と同様に，次のような補正を加える．K_0 を図 2.11 右のような 4 つの臨界点をもつ自明な結び目として，$Z(K_0)$ を用いて，

$$\tilde{Z}(K) = Z(K) \cdot Z(K_0)^{-\mu(K)+1} \tag{3.17}$$

とおく．ここで $\mu(K)$ は，K の極大点の個数を示す．無限直積 $\prod_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m$ において

$$\tilde{Z}(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Z}_m(K), \quad \tilde{Z}_m(K) \in \mathcal{A}_m$$

と表す．このようにして，Kontsevich による次の定理が得られる．

定理 3.3 (Kontsevich)　$\tilde{Z}(K)$ は $\prod_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m$ に値をもつ結び目の位相不変量である．また，$\tilde{Z}_m(K)$ は，$\mathcal{A}_m$ に値をもつオーダー m の位相不変量である． □

リンクの **Conway 多項式**は，向きのついたリンクの不変量で，スケイン関係式

$$\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = z\nabla_{L_0}$$
$$\nabla_{\bigcirc} = 1$$

で特徴づけられる．∇_L は z を変数とする多項式となる．Vassiliev 不変量の

定義は，向きのついたリンクに対しても容易に拡張されるが，∇_L の z^k の係数を，$a_k(L)$ とかくと，a_k は，オーダー k の不変量であることが，ただちに確かめられる．とくに，結び目 K のオーダー 2 の不変量に注目すると式(3.17)の次数 2 の項から

$$(3.18)\quad \frac{1}{4\pi^2}\int_{t_1<t_2}\sum_P(-1)^{\epsilon(P)}D_P\omega_{i_1j_1}(t_1)\wedge\omega_{i_2j_2}(t_2)+\frac{1}{24}\mu(K)-\frac{1}{24}$$

が得られる．D_P が図 3.2 右のダイアグラムのとき D_P を 1，それ以外の場合は 0 とすると，積分(3.18)は，整数に値をもつ結び目の位相不変量で Conway 多項式の 2 次の係数と一致することが示される．

上の Conway 多項式の 2 次の係数の積分表示では，$Z(K_0)$ の 2 次の項の計算を用いている．この計算においては，図 3.3 右に示した，$d\log t$ と $d\log(1-t)$ の反復積分が現れる．これは，**2 重対数関数**(dilogarithm)を用いて

$$\int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}dt=-\frac{\pi^2}{6}$$

で表される．$Z(K_0)$ の高次の項には，$d\log t$ と $d\log(1-t)$ の高次の反復積分が現れ，これは，**多重ゼータ関数**(multiple zeta function)

$$\zeta(s_1,s_2,\cdots,s_k)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_k}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}$$

の特殊値で表すことができる．ここで $m_1,\cdots,m_k$ は正の整数である．

$\mathcal{A}_m$ の双対空間の要素を**ウエイト系**(weight system)とよぶ．定理 3.3 より，ウエイト系を与えると，結び目の位相不変量を構成することができる．ウエイト系のひとつの構成方法は，半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその表現 $r:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ を用いるものである．具体的には，図 3.3 左に示したように，コードダイアグラムを 2 通りの基本的な構成要素に分解して，それらに対して，それぞれ，$\frac{1}{\kappa}\Omega=\frac{1}{\kappa}\sum_\mu I_\mu\otimes I_\mu\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ および，表現 r に対応した $\mathfrak{g}^*\otimes V^*\otimes V$ の要素を対応させる．ここで，$\{I_\mu\}$ は，$\mathfrak{g}$ の Cartan–Killing 形式についての，正規直交基底である．コードダイアグラムに応じてこれらのテンソルを簡約して得られるスカラーが 4 項関係式を満たすことが確かめられる．このスカラーに対

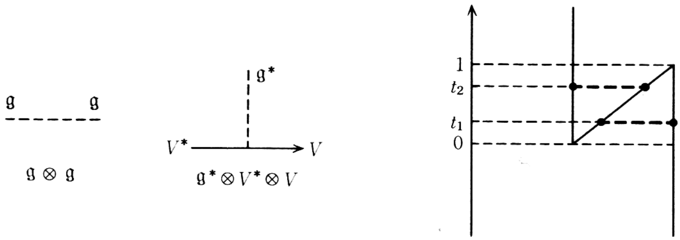


図 3.3 左図は Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその表現 V によるウエイト系の構成.
右図は $Z(K_0)$ の 2 次の項の計算を示す.

してさらに，関係式 (3.3) を満たすように正規化をほどこしたものが求めるウエイト系である.

定理 2.3 の後に述べたように，$\mathfrak{g}=sl_m(\mathbb{C})$ とその m 次元表現の場合，組みひも群のモノドロミー表現が岩堀–Hecke 代数の表現になる．この状況で，上のウエイト系を構成すると，得られる不変量について，スケイン関係式を計算することができる．不変量は，**2 変数 Jones 多項式** $P(x,y)$ で，$x=q^{\frac{m}{2}}$，$y=q^{-\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}$ とおいたものになる．ここで，$q=\exp(2\pi\sqrt{-1}/\kappa)$ で，2 変数 Jones 多項式は，スケイン関係式

$$x^{-1}P_{L_+}-xP_{L_-}=yP_{L_0},\quad P_{\bigcirc}=1$$

によって特徴づけられる．このことから，正規化項 $Z(K_0)$ は，

$$Z(K_0)=\frac{m(q^{1/2}-q^{-1/2})}{q^{m/2}-q^{-m/2}}$$

と求められる．文献[38]では，このような考察を用いて，上の $Z(K_0)$ と $d\log t$ と $d\log(1-t)$ の反復積分による表示を比較して，多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式が求められている．例えば

$$\left(\frac{1}{2^{2n-2}}-1\right)\zeta(2n)-\zeta(1,2n-1)+\cdots+\zeta(\underbrace{1,\cdots,1}_{2n-2},2)=0$$

などが示される.

§3.2 Chern–Simons 汎関数と Ray–Singer トーション

M を向きのついたコンパクト 3 次元多様体とする．ここでは，M の境界はないとし，Lie 群 G として，$SU(2)$ をとる．P を，M 上の G 主束とする．P の接続全体の空間を $\mathcal{A}$ で表すと，$\mathcal{A}$ は，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式全体の空間 $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視される．2.5 節で説明したように，Chern–Simons 汎関数 $CS: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ は，

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}\Big(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\Big), \quad A \in \mathcal{A}$$

によって定義される．P のゲージ群 $\mathcal{G}$ は，M から G へのなめらかな写像全体 $\mathrm{Map}(M, G)$ と同一視できて，ゲージ群 $\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}$ への作用

$$g^*A = g^{-1}Ag + g^{-1}dg, \quad g \in \mathcal{G}$$

により，Chern–Simons 汎関数は $CS(g^*A) = CS(A) + n$, $n \in \mathbb{Z}$ と変化する．2.5 節で示したように，Chern–Simons 汎関数の臨界点は平坦接続である．

次に，ゲージ群の作用の無限小バージョンを記述しよう．ゲージ群 $\mathcal{G}$ の要素 g が，$g = e^{tf}$ の形に表されているとすると，

$$g^*A = A + t(df + [A, f]) + \mathcal{O}(t^2), \quad A \in \mathcal{A}$$

とかける．したがって，ゲージ群の作用の無限小バージョンは，

$$d_A f = df + [A, f] \tag{3.19}$$

で定まる共変微分 d_A によって与えられる．$\alpha \in \mathcal{A}$ を平坦接続として，α に付随する局所系を $\mathfrak{g}_\alpha$ とかく．$\mathfrak{g}_\alpha$ に値をとる j 次微分形式全体を Ω^j_α で表すと，d_α を微分とする de Rham 複体

$$0 \longrightarrow \Omega^0_\alpha \longrightarrow \Omega^1_\alpha \longrightarrow \Omega^2_\alpha \longrightarrow \Omega^3_\alpha \longrightarrow 0$$

が得られる．ここで，$d_\alpha \circ d_\alpha = 0$ は，α が平坦接続であることからしたがう．

この節では，平坦接続 α は，

$$H^*(M, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$$

を満たしていると仮定する．Poincaré 双対性より，本質的な条件は，

$$H^0(M, \mathfrak{g}_\alpha) = 0, \quad H^1(M, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$$

であるが，$H^0(M, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ は，平坦接続 α のホロノミーとして得られる基本

群 $\pi_1(M)$ の線形表現が既約であることに対応し，また，$H^1(M,\mathfrak{g}_\alpha)=0$ は，平坦接続の空間内で，α が孤立していることに対応している．

ここで，考察の動機付けを与える，古典的な漸近展開の理論を復習しよう．まず，Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}, \quad \mu > 0$$

から出発する．これを解析接続して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\; e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\lambda}, \quad \lambda\in\mathbb{R} \tag{3.20}$$

が得られる．Q を $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を変数とする非退化2次形式とし，$\operatorname{sgn} Q$ を Q の符号とする．式(3.20)を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{iQ(x_1,\cdots,x_n)}dx_1\cdots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{|\det Q|}}\; e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} Q}$$

が得られる．

次に，実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ について，積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikf(x_1,\cdots,x_n)}dx_1\cdots dx_n \tag{3.21}$$

の $k\to\infty$ における漸近挙動を記述する．f の臨界点は有限個で，すべて非退化な $\mathbb{R}^n$ の点であるとする．まず，一変数の積分

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikf(x)}dx$$

を扱おう．$f(x)$ の臨界点以外では，$k\to\infty$ における積分への寄与は，互いに打ち消しあうので，臨界点からの寄与を計算する．簡単のため，$f(x)$ はただひとつの臨界点 x_0 をもち，$f''(x_0)>0$ であると仮定する．このとき，

$$g(k) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{ikf(x)}dx = \int_{u_1}^{u_2} e^{ik(f(x_0)+u^2)}\frac{2u}{f'(x)}du$$

と表される．ここで，$f(x)-f(x_0)=u^2$ と変数変換した．次に，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2u}{f'(x)} = \sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}$$

を用いて,

$$g(k) \sim_{k \to \infty} \sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iku^2 + ikf(x_0)} dx$$

が得られる．さらに，Gauss 積分(3.20)と合わせて $g(k)$ の $k \to \infty$ における漸近展開の主要項は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikf(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kf''(x_0)}}\ e^{ikf(x_0) + \frac{\pi i}{4}}$$

で与えられることがわかる．一般に，$f(x_1, \cdots, x_n)$ に関する上の仮定の下で，積分(3.21)の $k \to \infty$ における漸近展開の主要項は，

(3.22)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikf(x_1, \cdots, x_n)}\ dx_1 \cdots dx_n \ \sim_{k \to \infty} \ \sum_{\alpha} \frac{\pi^{n/2} e^{ikf(\alpha)}}{k^{n/2} \sqrt{|\det\ H(f, \alpha)|}}\ e^{\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn}\ H(f,\alpha)}$$

と表されることが知られている．ここで，和は，f の臨界点 α 全体をわたり，$H(f, \alpha)$ は，f の α における Hessian を表す．

ここで，Chern–Simons 汎関数の状況にもどろう．$\alpha \in \mathcal{A}$ を平坦接続として，$(\Omega^*_\alpha, d_\alpha)$ を，α から決まる de Rham 複体とする．接続の空間 $\mathcal{A}$ はアフィン空間なので $\mathcal{A}$ の α における接空間 $T_\alpha \mathcal{A}$ は 1 次微分形式の空間 $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視される．接空間 $T_\alpha \mathcal{A}$ には，

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \operatorname{Tr}(A \wedge *B)$$

によって，内積が定義されている．この内積による，接空間の直交分解

$$T_\alpha \mathcal{A} = \operatorname{Im}\ d_\alpha \oplus \operatorname{Ker}\ d_\alpha^*$$

が得られる．ここで，$d_\alpha : \Omega^0_\alpha \to \Omega^1_\alpha$ は，式(3.19)で定義した共変微分で，$d^*_\alpha : \Omega^1_\alpha \to \Omega^0_\alpha$ は，その随伴作用素である．接空間の部分空間 $\operatorname{Im}\ d_\alpha$ は，ゲージ群

の作用による軌道$\mathcal{G}\alpha$のαにおける接空間とみなすことができる．

Chern–Simons 汎関数の，平坦接続αにおける Hessian を計算するために，tをパラメータとする接続の族$\alpha_t=\alpha+t\beta$に対するCSの挙動を調べると，

$$CS(\alpha_t)=CS(\alpha)+\frac{t^2}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}(\beta\wedge d_\alpha\beta)+\mathcal{O}(t^3)$$

と表されることがわかる．したがって，平坦接続αにおける Hessian は，2次形式

$$Q(\beta)=-\langle\beta,*d_\alpha\beta\rangle$$

で与えられる．Chern–Simons 汎関数は，無限小ゲージ変換で不変なので，Qは，ゲージ群の作用による軌道$\mathcal{G}\alpha$の方向には退化していて，商空間$\Omega^1_\alpha/d_\alpha\Omega^0_\alpha$上の非退化な2次形式を定める．また$Q$は$\Omega^1_\alpha/d_\alpha\Omega^0_\alpha$上の作用素$-*d_\alpha$とみなすことができる．以下，この2次形式の行列式を計算する．これは，無限次の行列式であり，正確な意味は，後で述べるように，スペクトルゼータ関数を用いて定義される正規化された行列式である．まず，

$$\Omega^1_\alpha\oplus\Omega^3_\alpha\cong\Omega^1_\alpha\oplus\Omega^0_\alpha$$

上の作用素

$$P=\varepsilon(d_\alpha*+*d_\alpha)$$

を導入する．ここで，εはΩ^0_α上$\varepsilon=1$，Ω^1_α上$\varepsilon=-1$として，それぞれ作用する．Pの作用を直和分解

$$\Omega^0_\alpha\oplus\mathrm{Im}\ d_\alpha\oplus\mathrm{Ker}\ d^*_\alpha$$

に関して記述すると

$$P=\begin{pmatrix}0 & -d^*_\alpha & 0\\ -d_\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q\end{pmatrix}\tag{3.23}$$

の形に表すことができて，

$$P^2=\Delta^0_\alpha\oplus\Delta^1_\alpha\tag{3.24}$$

が得られる．ここで，Δ^j_αは，$d^*_\alpha d_\alpha+d_\alpha d^*_\alpha$で与えられる$\Omega^j_\alpha$上の Laplace 作用素である．

一般に，Laplace 作用素 Δ の**正規化された行列式**(regularized determinant)は，次のように定義される．Δ の正の固有値全体を重複もこめて並べたものを

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_j \leqq \cdots$$

として，スペクトルゼータ関数を

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^s}$$

で定義する．これは，s の実数部分が十分大きいところで正則関数となり，全平面に有理型関数として，解析接続されることが知られている．とくに，$s=0$ は，極ではなく，$\zeta_\Delta(0)$, $\zeta'_\Delta(0)$ の値が定まる．Δ の正規化された行列式を，

$$\det\ \Delta = \exp(-\zeta'_\Delta(0))$$

として定義する．

平坦接続 α にもどろう．Ray と Singer により，

$$T_\alpha(M) = \frac{(\det \Delta_\alpha^0)^{3/2}}{(\det \Delta_\alpha^1)^{1/2}}$$

は，多様体の Riemann 計量にはよらない位相不変量であることが示された．T_α を平坦接続 α に関する M の **Ray–Singer トーション**(Ray-Singer torsion)とよぶ．$|\det Q|$ に適当な意味づけを与えることにより，次の命題を示すことができる．

命題 3.4 平坦接続 α における Chern–Simons 汎関数の Hessian の正規化された行列式と，Ray–Singer トーションの間には，

$$\frac{\sqrt{\det d_\alpha^* d_\alpha}}{\sqrt{|\det Q|}} = T_\alpha^{1/2}$$

が成立する．

［証明］ 作用素 P^2 の表示(3.24)から，正規化された行列式としての等式

$$\det P^2 = \det \Delta_\alpha^0 \det \Delta_\alpha^1$$

が得られる．したがって絶対値 $|\det P|$ は意味をもつ．また，P の(3.23)の表示から，$|\det Q|$ は，

$$|\det P| = \det(d_\alpha^* d_\alpha)|\det Q|$$

を満たすように定めるのが自然である．したがって，

$$|\det Q| = \frac{(\det \Delta_\alpha^1)^{1/2}}{(\det \Delta_\alpha^0)^{1/2}}$$

が成立し，$\Delta_\alpha^0 = d_\alpha^* d_\alpha$ と合わせて命題が示された． ∎

Chern–Simons 汎関数の分配関数

$$Z_k(M) = \int \exp(2\pi\sqrt{-1}\, kCS(A))\mathcal{D}A$$

の，$k\to\infty$ における漸近挙動に関して，これまでの考察から示唆されることを述べておこう．Chern–Simons 汎関数の臨界点は，平坦接続であったが，簡単のため，これらは有限個であると仮定しておく．式(3.22)で述べた，有限次元のアナロジーから，漸近展開の主要項は，平坦接続からの寄与であることが期待される．Chern–Simons 汎関数は，ゲージ軌道について退化しているが，上の命題における，$\sqrt{\det d_\alpha^* d_\alpha}$ は，ゲージ軌道の体積要素と，Lie 群の体積要素の比と解釈することができる．Hessian の正規化された行列式として現れた Ray–Singer トーションは，Reidemeister トーションとよばれる位相不変量と一致することが Cheeger と Müller の定理として知られている．Witten によって予想された $Z_k(M)$ の $k\to\infty$ における漸近挙動は

$$Z_k(M) \sim \frac{1}{2} e^{-3\pi i/4} \sum_\alpha \sqrt{T_\alpha(M)}\, e^{-2\pi i I_\alpha/4} e^{2\pi i(k+2)CS(A)}$$

という形である．ここで，右辺は，平坦接続 α に関する和である．I_α は Atiyah–Patodi–Singer [16] によって定義されたスペクトルフローとよばれるもので，8 を法として定まる整数である．漸近挙動の記述については，多様体のフレーミングと位相因子に関する微妙な問題を含んでいる．Witten の論文[1]では，η 不変量を用いて記述されているが，ここでは，Atiyah [14] による標準的な 2–フレーミングを用いた述べ方をした．

§3.3 Chern–Simons 摂動理論による位相不変量の構成

まず，$G=U(1)$ の場合からはじめよう．$L=K_1\cup K_2$ を $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの成分をもつリンクとする．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^3$ 上の $U(1)$ 接続全体の空間とする．これは，$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{R}$ に値をもつ 1 次微分形式の空間と同一視される．この場合の Chern–Simons 汎関数の分配関数を表す式(2.41)に対応する式は，

(3.25)
$$Z_k=\int_{\mathcal{A}}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}\,k}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}A\wedge dA+\sqrt{-1}\int_{K_1}A+\sqrt{-1}\int_{K_2}A\right)\mathcal{D}A$$

という形に表される．Chern–Simons 汎関数は，$A\mapsto A\wedge dA$ で表される接続の空間上の 2 次形式を，ゲージ不変性を保つように，非可換な場合に拡張したものと考えることができる．式 (3.25)のような，2 次形式と 1 次形式の和の指数関数に関する経路積分は，Feynman 経路積分の中では，比較的よく理解されているクラスであり，Gauss 積分のくり返しによって表すことができる．

まず，有限次元の積分のアナロジーで説明しよう．非退化な 2 次形式
$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda_{ij}x_ix_j$$
に対して，積分
$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{\sqrt{-1}\left(Q(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{n}\mu_jx_j\right)}\,dx_1\cdots dx_n$$
を考える．平方完成することにより，上の積分は，定数倍をのぞいて，
$$e^{-\sqrt{-1}\frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda^{ij}\mu_i\mu_j}$$
の形に帰着することができる．ここで，(λ^{ij}) は (λ_{ij}) の逆行列である．

無限次元の積分 Z_k の状況にもどろう．実はこの場合も微分作用素 d の逆作用素を用いて記述することができる．逆作用素は，
$$(\widehat{L}\varphi)(\boldsymbol{x})=\int_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge\varphi(\boldsymbol{y})$$

の形の積分作用素であり，積分核 L は，Green 形式とよばれる．$\mathbb{R}^3$ の場合には，Green 形式 L は，次のように表される．ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} \tag{3.26}$$

とおく．これは，$\int_{S^2}\omega(\boldsymbol{x})=1$ と正規化された球面の体積要素を与える．この ω を用いて，Green 形式は，

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \omega(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

と表される．積分 Z_k の主な部分に，

$$\int_{\boldsymbol{x}\in K_1,\ \boldsymbol{y}\in K_2}\omega(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

が現れる．この積分は，Gauss によって求められた，絡み数の積分表示である．

次に，$SU(2)$ Chern–Simons 理論の分配関数の $k\to\infty$ における漸近挙動を議論する．3.2 節でも説明したように，漸近展開の主要項への寄与は，Chern–Simons 汎関数の臨界点である平坦接続からのものと考えられる．ここでも，平坦接続 α は，$H^*(M,\mathfrak{g}_\alpha)=0$ を満たすと仮定する．

まず，有限次元の場合に，

$$Z_k = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}kf(x_1,\cdots,x_n)}dx_1\cdots dx_n \tag{3.27}$$

の形の積分の $k\to\infty$ における漸近展開の高次の項を Feynman ダイアグラムを用いて表示する方法を紹介する．

(3.27)の積分 Z_k において，f が，非退化な 2 次形式 Q を用いて

$$f(x_1,\cdots,x_n) = Q(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{ijk}\lambda_{ijk}x_ix_jx_k$$

と表されている場合を考えよう．変数変換によって，

$$Z_k = k^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}Q(x_1,\cdots,x_n)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{-1})^m}{m!\ k^{m/2}}\left(\sum_{ijk}\lambda_{ijk}x_ix_jx_k\right)^m dx_1\cdots dx_n$$

と表すことができる．積分 Z_k の $k\to\infty$ における漸近展開を求めるために，

積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}Q(x_1,\cdots,x_n)}\left(\sum_{ijk}\lambda_{ijk}x_ix_jx_k\right)^m dx_1\cdots dx_n \tag{3.28}$$

を計算しよう．この積分は，変数 $J_1,\cdots,J_n$ を導入することにより，微分作用素

$$D_j=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial J_j}$$

を用いて，

$$\left[\left(\sum_{ijk}\lambda_{ijk}D_iD_jD_k\right)^m\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\left(Q(x_1,\cdots,x_n)+\sum_k J_kx_k\right)}dx_1\cdots dx_n\right]_{J=0}$$

と表すことができる．したがって，平方完成を用いて，積分(3.28)は，適当な定数倍を除いて

$$\left[\left(\sum_{ijk}\lambda_{ijk}D_iD_jD_k\right)^m e^{-\sqrt{-1}\frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda^{ij}J_iJ_j}\right]_{J=0}$$

とかける．これは，λ^{ij} と λ_{ijk} の多項式となり，m が偶数のときのみ 0 ではない．$m=2$ のときは，具体的には，

$$\sum_{ijki'j'k'}\lambda_{ijk}\lambda_{i'j'k'}\lambda^{ii'}\lambda^{jj'}\lambda^{kk'}$$

の形の項と

$$\sum_{ijki'j'k'}\lambda_{ijk}\lambda_{i'j'k'}\lambda^{ij}\lambda^{kk'}\lambda^{i'j'}$$

の形の項で表される．これらを，それぞれ，図 3.4 のように，それぞれの頂点に 3 本の辺が集まるグラフで表す．このようなグラフは，2 ループの **Feynman ダイアグラム**とよばれる．一般の偶数 m の場合には，m 個の頂点をもち，各頂点のまわりに 3 本の辺が集まるグラフによって，漸近展開に現れる項を記述することができる．これらは，m ループの Feynman ダイアグラムとよばれる．

このような手法を，形式的に Chern–Simons 汎関数の分配関数

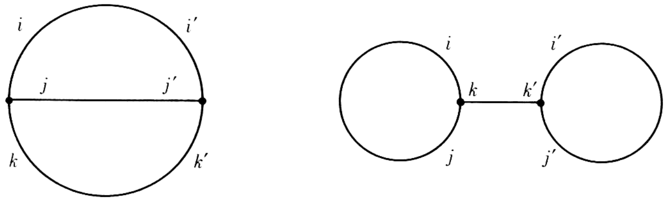


図 3.4　2 ループの Feynman ダイアグラム

$$Z_k(M) = \int \exp\left(2\pi\sqrt{-1}k\ CS(A)\right)\mathcal{D}A$$

に適用しようとすると，無限次元空間 $\mathcal{A}_M$ における測度の問題に加えて，いくつかの困難な点がある．Chern–Simons 汎関数の臨界点は，平坦接続であった．Z_k の $k \to \infty$ における漸近挙動を調べるわけであるが，3.2 節でも述べたように，Chern–Simons 汎関数は，局所的には，ゲージ変換について不変であり，Hessian は，ゲージ軌道にそって退化している．再び，有限次元の積分に戻って，このような状況における手法を説明しよう．

G を l 次元の Lie 群として，G が $\mathbb{R}^n$ にイソメトリーとして作用していて，$f(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{ijk} \lambda_{ijk} x_i x_j x_k$ は G の作用で不変であるとする．また，なめらかな関数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ が存在して，F は，それぞれの G 軌道でただ 1 つの零点をもつとする．$F(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ における G 軌道 $G\boldsymbol{x}$ に注目する．写像 $\varphi: G \to \mathbb{R}^l$ を $\varphi(g) = F(g\boldsymbol{x})$ で定め，φ の，G の単位元における Jacobi 行列を $J(\boldsymbol{x})$ で表す．行列式 $\det J(\boldsymbol{x})$ は，G 軌道 $G\boldsymbol{x}$ の体積要素と，Lie 群 G の体積要素の比を表す．積分 (3.27) は，このままでは，G 軌道にそって同じ積分が無限に重複して計算されていることになるので，本質的な部分を取り出すと

$$(3.29) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}kf(x_1, \cdots, x_n)} \delta(F(\boldsymbol{x})) \det J(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n$$

となる．ここで，δ は，Dirac の δ 関数である．この部分について，Fourier 変換を用いて

$$\delta(F(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_{\mathbb{R}^l} e^{\sqrt{-1}\sum_j F_j(\boldsymbol{x})\phi_j} d\phi_1\cdots d\phi_l$$

と表示し，$\phi_1,\cdots,\phi_l$ をあらたに積分変数として加えることにより，δ 関数の部分を作用に組み込むことができる．Jacobi 行列式の部分については，次の方法を用いて，やはり，作用に組み込むことができる．Grassmann 変数とよばれる変数の組 $\{c_i\}$, $\{\bar{c}_i\}$, $1 \leqq i \leqq l$ を導入する．これらは，互いに反可換な変数で，

$$c_i c_j + c_j c_i = 0, \quad \bar{c}_i\bar{c}_j + \bar{c}_j\bar{c}_i = 0, \quad c_i\bar{c}_j = \bar{c}_j c_i, \quad 1 \leqq i,j \leqq l$$

を満たす．行列式 $\det J$ は，定数倍をのぞいて，

$$\int e^{\sqrt{-1}\sum_{ij}\bar{c}_i J_{ij} c_j} d\bar{c}_1\cdots d\bar{c}_l dc_1\cdots dc_l$$

と表される．このようにして，変数 $\phi_1,\cdots,\phi_l$ と Grassmann 変数 $\{c_i\}$, $\{\bar{c}_i\}$, $1 \leqq i \leqq l$ を加えることにより，積分(3.29)の被積分関数の部分を，すべて e のかたにのせて，作用に組み込むことができる．Grassmann 変数については，例えば[3]などを参照されたい．

これは，有限次元のアナロジーであるが，Chern–Simons 汎関数の分配関数においても，ゲージ軌道にそった退化の問題を解消するため，平坦接続 α のまわりで，$d_\alpha^* A = 0$ を満たす A に制限して積分を行う．これは，上の $F(\boldsymbol{x}) = 0$ に対応する操作で，**ゲージ固定**(gauge fixing)とよばれる．そのために，あらたに，フェルミオン場 $c, \bar{c}$ とボソン場 ϕ を導入する．ここで用いられる手法は，BRS 形式とよばれる．

Axelrod–Singer [18]によって，このような予備的な考察をもとにして，Green 形式の積分で表される 3 次元多様体の位相不変量が構成された．M をコンパクトで向きの与えられた境界のない 3 次元多様体とする．M 上の主 $SU(2)$ 束の平坦接続 α をとり，α は，$H^*(M, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ を満たすと仮定する．

M の Riemann 計量を固定して，$d_\alpha^*(\Delta_\alpha)^{-1}$ の積分核

$$L \in \Omega^2(M \times M;\ \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$$

を考える．ここで Δ_α は 3.2 節の Laplace 作用素 Δ_α^j, $0 \leqq j \leqq 3$ の直和である．$SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の正規直交基底を $\{I_a\}$, $a = 1,2,3$ として

$$L=\sum L_{ab}(x,y)I_a\wedge I_b$$

と表す．L は Green 形式であり，$M\times M$ 上の局所系 $\mathfrak{g}_\alpha\otimes\mathfrak{g}_\alpha$ を係数とする de Rham 複体の共変微分を $d_{(\alpha,\alpha)}$ で表すと，

$$d_{(\alpha,\alpha)}L_{ab}(x,y)=-\delta_{ab}\delta(x,y) \tag{3.30}$$

が成立する．ここで，$\delta(x,y)$, $(x,y)\in M\times M$ は，対角集合 $\Delta\subset M\times M$ の Poincaré 双対を表す3次微分形式で，$M\times M$ 上の3次微分形式 $\psi(x,y)$ に対して，

$$\int_{M\times M}\delta(x,y)\psi(x,y)=\int_M\psi(x,x)$$

を満たす．また，

$$L_{ab}(x,y)=-L_{ba}(y,x)$$

が成り立つ．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造定数を $\{\gamma_{abc}\}$ で表す．図3.4に示した，2ループの Feynman ダイアグラムに対応して，

$$I_{\Gamma_1}(M,\alpha)$$
$$=-\frac{1}{8}\sum\int_{M\times M\setminus\Delta}\gamma_{a_1b_1c_1}\gamma_{a_2b_2c_2}L_{a_1c_1}(x_1,x_1)\wedge L_{a_2c_2}(x_2,x_2)\wedge L_{b_1b_2}(x_1,x_2)$$

$$I_{\Gamma_2}(M,\alpha)$$
$$=\frac{1}{12}\sum\int_{M\times M\setminus\Delta}\gamma_{a_1b_1c_1}\gamma_{a_2b_2c_2}L_{a_1a_2}(x_1,x_2)\wedge L_{c_1c_2}(x_1,x_2)\wedge L_{b_1b_2}(x_1,x_2)$$

とおく．ここでは詳しくは述べないが，$L_{a_1c_1}(x_1,x_1)$ などは，Green 形式の対角集合における特異性の項をのぞくことにより定義される．Axelrod–Singer [18]により，次の定理が示された．

定理 3.5 (Axelrod–Singer)　3次元多様体 M と，その上の $SU(2)$ 平坦接続 α に関する上の仮定のもとで，

$$I_{\Gamma_1}(M,\alpha)+I_{\Gamma_2}(M,\alpha)-\frac{1}{4}CS_{grav}(g,s)$$

は，Riemann 計量によらない M の位相不変量である．　□

上の定理における $CS_{grav}(g,s)$ は，M の接バンドルに，M の Riemann 計

量から自然に定まる Levi–Civita 接続に関する，Chern–Simons 汎関数の値である．これは，M の接バンドルの自明化，つまり，M のフレーミング s を与えることにより定まる．以下，定理の証明の概略を述べよう．

定理で述べられている量が，M の Riemann 計量には依存しないことを示すため，M の Riemann 計量の 1–パラメータ族 $\{g_t\}$ を考える．これに対応して，Green 形式の 1–パラメータ族 L_t が得られる．パラメータ t に関する微分を ∇ で表すと，式(3.30)より，$d_{(\alpha,\alpha)}L$ は，M の Riemann 計量によらないことから，

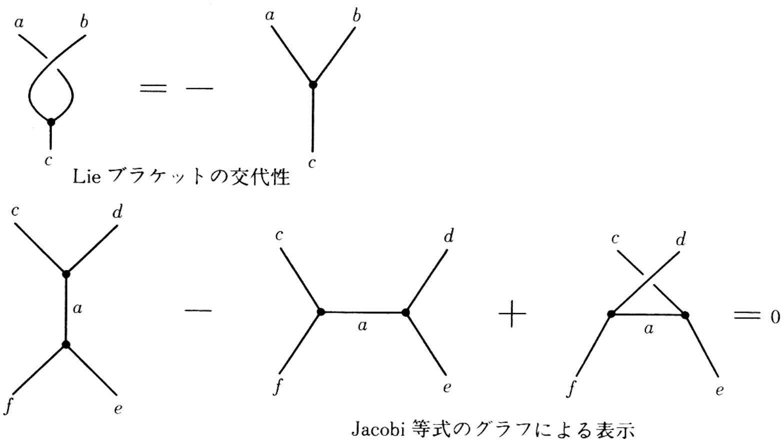
$$d_{(\alpha,\alpha)}\nabla L_t = 0$$

が得られる．したがって，仮定 $H^*(M,\mathfrak{g}_\alpha)=0$ より，$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に値をとる $M\times M$ 上の 1 次微分形式 B で，

$$\nabla L = d_{(\alpha,\alpha)}B \tag{3.31}$$

を満たすものが存在する．ここで，$L_t=L$ と略記している．

次に多様体 $\mathrm{Conf}_2(M)=M\times M\setminus\Delta$ のコンパクト化を次のように構成する．$M\times M$ の Δ にそった，実多様体としてのブローアップ $\pi:\widehat{M\times M}\to M\times M$ を考える．$\pi^{-1}(\Delta)$ は，M の接バンドルの部分バンドルで，接ベクトルの



Lie ブラケットの交代性

Jacobi 等式のグラフによる表示

図 3.5

長さが1のもののみからなる SM と同一視される．SM は，M 上の S^2 バンドルである．$\widehat{M\times M}$ は，境界のあるコンパクト多様体で，内点集合は，$M\times M\backslash\Delta$ と，また，境界は SM と，それぞれ同一視される．$\mathrm{Conf}_2(M)$ のコンパクト化 $\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ として，この $\widehat{M\times M}$ を採用する．積分 I_{Γ_1}，I_{Γ_2} は，ともに，$\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分と考えることができて，積分が有限の値になることも示される．式 (3.31)，式 (3.30) および，Stokes の定理を用いて，∇I_{Γ_j}，$j=1,2$ を計算する．∇I_{Γ_1} については，$\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分

$$\frac{1}{8}\int_{\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}}\sum\gamma_{a_1b_1c_1}\gamma_{a_2b_2c_2}B_{a_1c_1}(x_1,x_1)L_{a_2c_2}(x_2,x_2)\delta_{b_1b_2}\delta(x_1,x_2)$$
$$+\frac{1}{8}\int_{\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}}\sum\gamma_{a_1b_1c_1}\gamma_{a_2b_2c_2}L_{a_1c_1}(x_1,x_1)B_{a_2c_2}(x_2,x_2)\delta_{b_1b_2}\delta(x_1,x_2)$$

および，$\partial\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分の和として表される．ここで，$\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分の項のみをまとめると，

$$\frac{1}{4}\int_M\sum\gamma_{acd}\gamma_{aef}B_{cd}(x,x)L_{ef}(x,x) \tag{3.32}$$

となる．同様にして，I_{Γ_2} からは，$\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分の項として，

$$\frac{1}{4}\int_M\sum(\gamma_{ace}\gamma_{afd}-\gamma_{acf}\gamma_{aed})B_{cd}(x,x)L_{ef}(x,x) \tag{3.33}$$

が現れる．ここで，和は a,c,d,e,f についてとる．式(3.32)と式(3.33)に対して，図3.5に示した Lie 環の Jacobi 等式と Lie ブラケットの交代性を用いると，これらの和は0になることがわかる．さらに，ここで詳しくは述べないが，$\partial\overline{\mathrm{Conf}_2(M)}$ 上の積分から，CS_{grav} の項が現れることが示される．

《要約》

3.1　結び目の Vassiliev 不変量を定義し，Kontsevich による反復積分表示を与えた.

3.2　Chern–Simons 汎関数の臨界点である平坦接続において，Hessian の正規化された行列式を計算して，Ray–Singer トーションが現れることを示した.

3.3　Chern–Simons 摂動理論から導かれる 3 次元多様体の位相不変量を記述した.

今後の方向と課題

共形場理論の展開

共形場理論については，主に，種数0の場合を解説したが，1.4節で述べた共形ブロックの空間の定義は，土屋–上野–山田[45]によって，一般の種数のRiemann面に対して定式化された．これにより，共形場理論を，Riemann面のモジュライ空間上のベクトル束の理論としてとらえることが可能になった．さらに，このベクトル束に射影接続が構成されている．これは，基本的には，モジュライ空間の境界で，KZ接続を入れ，これをモジュライ空間全体に拡張することによってなされている．一方，共形ブロックの空間は，2.5節でも述べたように，Riemann面上のG平坦接続のモジュライ空間上の複素直線束の正則切断の空間としても定式化される．[17]では，Chern–Simonsゲージ理論の幾何学的量子化の立場から，共形ブロックの空間をファイバーとするRiemann面のモジュライ空間上のベクトル束の射影接続が構成されている．

この本では，3次元多様体のWitten不変量$Z_k(M)$を共形場理論を用いて定式化した．Chern–Simons理論から示唆される$Z_k(M)$の漸近挙動を共形場理論の立場から示すことは重要な問題である．最近，吉田朋好[47]によって，Hitchinらによって試みられた共形場理論のAbel化のプログラムが実行された．これは，Riemann面の2重分岐被覆に持ち上げ，Prym多様体の理論を用いることにより，共形ブロックの空間をテータ関数のことばで完全に記述するというものである．これにより，射影接続のホロノミーの構造について，テータ関数を用いた明確な記述を与えることが可能になった．

種数0の場合，KZ接続のモノドロミー表現は，[34], [44]などをへて，一般に，量子群によって記述されることがDrinfel'd [24]により示された．さ

らに，共形場理論と絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ との関係についての深い研究がなされるようになった.

不変量の幾何的側面と組合せ的側面

この本では，Witten 不変量の構成において，共形場理論との関係など，幾何的な側面を強調したが，Witten 不変量の定義に限れば，組合せ的なアプローチも可能である．レベル k が奇数のときは，2 次の巡回群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が，ウエイトの集合 $P_+(k)$ に $\mu \mapsto k-\mu$ によって，固定点なしに作用して，これによって，$Z_k(M)$ は，M のホモロジーなどで決まる項と，本質的な項の積に分解する．この本質的な部分を $\tau_r(M)$ とかくことにする．ここで，$r=k+2$ とおいた．M をホモロジー 3 球面とする．このとき，r を奇素数とすれば，$\tau_r(M) \in \mathbb{Z}[q]$, $q=e^{2\pi i/r}$ となることを示すことができる．そこで，$\tau_r(M)$ を $q-1$ のベキに展開して，さらに，r が十分大きい状況を考えることにより，大槻[42]により，形式的ベキ級数に値をもつ，M の不変量

$$\tau(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(M)(t-1)^n$$

が構成された．村上の結果[41]によって，

$$\lambda_0(M) = 1$$
$$\lambda_1(M) = 6\lambda(M)$$

となることもわかる．ここで，$\lambda(M)$ は，M の Casson 不変量である．このような，数論的な展開と，$Z_k(M)$ の $k\to\infty$ における漸近展開との関係は，まだ明らかにされていないようである．今後の重要な課題である．

また，[39]では，フレーミングの与えられたリンクについての，コードダイアグラムに値をとる，Vassiliev 不変量を Drinfel'd アソシエーターを用いて構成することにより，このリンクで Dehn サージェリーをほどこして得られる 3 次元多様体の位相不変量が構成された．これは，図 3.5 で示した関係式を法とする Feynman ダイアグラムの空間に値をとり，いわゆる有限型不変量の中で，ユニバーサルなものである．上の $\tau(M)$ との関係なども含めて，組織的に研究されている．Chern–Simons 摂動理論から定義される不変量は，

同じ空間に値をとるが，こちらの方は，M 上の平坦接続によって決まる．両者の正確な関係は，今のところ不明のようである．

結び目の Jones 多項式の発見は，歴史的には作用素環に由来するものであった．Jones は，II_1 サブファクター $N \subset M$ の指数の研究の過程において，組みひも群の表現と，その上の Markov トレースを見いだし，それが，Jones 多項式を定義する契機となった．II_1 サブファクターの分類理論は，その後，Ocneanu らによって，精密化され，パラグループとよばれる組合せ的な対象との対応が明らかになった．そこには，共形場理論と類似した，フュージョン代数，$6j$–シンボルなどの構造が現れる．$6j$–シンボルは共形場理論においては，2.1 節の図 2.2 で表される接続行列のかたちで登場する．一方，Turaev と Viro によって，3 次元多様体を 3 角形分割して，それぞれの 4 面体に，$6j$–シンボルを対応させて，それらの積の状態和をとることにより，3 次元多様体の位相不変量を構成する手法が見いだされた．パラグループに対しても，この手法を用いて，3 次元多様体の位相不変量の構成がなされている．詳しくは，Evans–Kawahigashi [25]をご覧いただきたい．このような位相不変量と Chern–Simons 理論との内在的な関係を明らかにすることは，今後の課題であろう．

積分で表される位相不変量

Chern–Simons 摂動理論により，さまざまな，位相不変量の積分表示を得ることができる．これは，積分幾何学に新しい視点をもたらすと思われる．印象的な例として，$\mathbb{R}^3$ 内の結び目について，Guadagnini–Martellini–Mintchev [29]によって，Chern–Simons 汎関数の分配関数の摂動的な計算から得られた結び目の不変量をあげておこう．$\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上の ω を，式(3.26)で定義される Green 形式とする．ω は，$\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上の 2 次微分形式で，$\int_{S^2}\omega=1$ を満たし，球面 S^2 の体積要素を定める．埋め込み $f: S^1 \to \mathbb{R}^3$ で表される結び目 K について，S^1 を $e^{2\pi i t}$, $0 \leqq t \leqq 1$ とパラメータ表示して，積分

$$I_X = \int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<1} \omega(f(t_1)-f(t_3)) \wedge \omega(f(t_2)-f(t_4))$$

$$I_Y=\int_{0<t_1<t_2<t_3<1,\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\setminus K}\omega(f(t_1)-\boldsymbol{x})\wedge\omega(f(t_2)-\boldsymbol{x})\wedge\omega(f(t_3)-\boldsymbol{x})$$

を考える．I_X, I_Y は，それぞれ，結び目全体の空間上の関数となるが，

$$I_X+I_Y-\frac{1}{24}$$

は，整数に値をとる結び目に位相不変量を定め，3.1 節で述べた Conway 多項式の 2 次の係数 $a_2(K)$ と一致することを示すことができる．結び目全体の空間上に，適当な点の配置の空間をファイバーとするファイバー束を考えると，I_X, I_Y は，それぞれ，Green 形式の積を引き戻して，ファイバー上で積分したものと解釈することができる．位相不変性を示すには，結び目全体の空間上で，$d(I_X+I_Y)=0$ を示せばよいことになるが，左辺の外微分の項は，点の配置の空間のコンパクト化によって記述することができる．ここでは，グラフについて，辺を退化させることによって境界作用素を定義したグラフ複体が重要な役割を果たす．詳細は，Bott–Taubes [21] などに述べられている．

積分，I_X, I_Y で，結び目をその射影図に近づけ，また，体積要素 ω を球面の両極に集中させていくと，I_X の方は，結び目の交差点のみで決まる量になる．一方，I_Y の方は，結び目の射影図で，交差の上下を無視して得られる平面曲線に対して決まる量に近づいていく．これは，平面曲線全体の空間をその特異性によって分割したときの，余次元 1 の成分で一定の値をとる．このような平面曲線の不変量は，Arnold [13] によって，接触幾何学の立場から，組織的に研究されている．Chern–Simons 摂動理論から得られる，積分で表される位相不変量と，Arnold による平面曲線の不変量との関係は興味深い問題である．

第 3 章では，Vassiliev 不変量の記述に，コードダイアグラムを用いた．これは，Chern–Simons 摂動理論の立場からは，不変量の漸近展開に現れる Feynman ダイアグラムに対応したものである．Σ を Riemann 面として，3.1 節の構成を，Σ 上のコードダイアグラムと，$\Sigma\times I$ 内のリンクの Vassiliev 不変量に拡張することができる．Σ 上のコードダイアグラムのホモトピー類全

体のはる複素線形空間を 4 項関係式でわったものを $A(\Sigma)$ とおくと，$A(\Sigma)$ には，自然に Poisson 代数の構造を入れることができる．これは，Σ 上のループのホモトピー類に対して定義された Goldman ブラケットを自然に拡張したものである．Lie 群 $G=SU(2)$ に対して，Σ 上の平坦 G バンドルのモジュライ空間を $\mathcal{M}_\Sigma$ とおく．$\mathcal{M}_\Sigma$ は，シンプレクティック構造をもつ．G の表現をコードダイアグラムのループに対応させ，3.1 節のウエイト系の定義において，ループにそった G バンドルのホロノミーの情報を加えることにより，$A(\Sigma)$ から，$\mathcal{M}_\Sigma$ 上の関数の空間 $C^\infty(\mathcal{M}_\Sigma)$ への写像 τ ができる．これは，Poisson 代数の準同型であることが示される．$\Sigma \times I$ 内の 2 重点をもつリンク全体のはる線形空間から $A(\Sigma)$ への射影があるが，上の Poisson 代数の準同型をリフトして，$C^\infty(\mathcal{M}_\Sigma)$ のある非可換化に値をもつ $\Sigma \times I$ 内のリンクの Vassiliev 不変量を構成することができる．

共形ブロックの空間は，幾何学的量子化のプロセスをへて，$C^\infty(\mathcal{M}_\Sigma)$ の非可換化とみなすことができた．Chern–Simons 摂動理論を，境界のある 3 次元多様体に対して展開する際，平坦接続の扱いが問題になるが，上の手法はひとつのアプローチを与えるかも知れない．また，$G=SL(2,\mathbb{R})$ とするとループに対する上の τ は，対応する Σ の双曲幾何構造において，ループをホモトピーの範囲で最短測地線として実現したときの測地線の長さを与える．この本では，コンパクト群についての，Chern–Simons 理論を扱ったが，非コンパクト群に関する理論を展開することは，双曲幾何学との関連を議論する上で重要であると考えられる．

曲面のモジュライ空間との関連

まず，行列積分について説明する．H_N を N 次の Hermite 行列 $M=(M_{ij})$ 全体とする．行列の多項式 $G(X)$ に対して，

$$\int_{H_N} \exp(-\mathrm{Tr}\ G(M))dM$$

のかたちの Hermite 行列積分を考える．ここで，dM は，N^2 次元 Euclid 空間 H_N の Euclid 不変 Lebesgue 測度で，

$$\int_{H_N} \exp(-\mathrm{Tr}(M^2/2))dM = 1$$

となるように正規化しておく．ここで著しいのは，行列積分とリボングラフの個数の母関数との関係である．ここで，リボングラフとは，各頂点の集まる辺について，巡回順序をつけたグラフである．

例として，

$$G(M) = \frac{M^2}{2} + \frac{tM^4}{4N}$$

の場合に，上の行列積分を $Z(N,t)$ として，t に関する展開を計算してみよう．一般に

$$\langle M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n} \rangle = \int_{H_N} M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n} \exp(-\mathrm{Tr}(M^2/2))dM$$

とおいて，3.3 節と同様の方法で計算すると，$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \delta_{il}\delta_{jk}$ となる．したがって，$\langle \mathrm{Tr}(M^4)^m \rangle$ の展開に現れるそれぞれの項は，頂点が m 個で，それぞれの頂点のまわりに 4 本の辺が集まるリボングラフに対応することがわかる．リボングラフの境界に円板をはりあわせることにより，Riemann 面を構成することができる．上のようなリボングラフで，種数 g の Riemann 面を与えるものの個数を $W(g,m)$ とおき，グラフの数え上げの重複を考慮すると，

$$\log Z(N,t) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m W(g,m) t^m$$

が得られる．曲面上のリボングラフの双対分割を考えると，$W(g,m)$ は，種数 g の閉曲面を，m 個の 4 角形によって，分割する個数ともみなすことができる．

種数 g で，n 個の点付きの Riemann 面のモジュライ空間を $M_{g,n}$ とかくと，リボングラフは，$M_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ のセル分割におけるセルに対応する．ここで，n はリボングラフにはりあわせる円板の個数に対応する．このセル分割は，2 次微分の理論を用いて，Mumford, Harer らによってなされたものである．リボングラフの辺に長さの情報を与えることにより，Riemann 面の複素構造

が構成される.

1990年ころ, Witten [46]によって, 2次元量子重力理論のLagrangianに対して, n点関数を計算する2通りの方法が提唱された. 第一の方法は, 上で説明した, Riemann面上のリボングラフの個数を行列積分を使って求める方法で, 第二の方法は, Riemann面のモジュライ空間の交叉理論を用いるものである. これらの2通りの方法で得られるn点関数が一致するという予想が定式化された. 行列積分は, [40]に解説されているように, 可積分系の理論と深く関わっている. Wittenによるこの予想は, モジュライ空間の交叉理論と, KdV方程式のτ関数との関係をも示唆するものである. Wittenの予想は, その後, Kontsevich [37]により解決された. 一方, Chern–Simons摂動理論に目を転ずると, 位相不変量の構成に用いた2ループのFeynmanダイアグラム(図3.4)は, $M_{0,3}\times\mathbb{R}^3_+$のセル分割に現れるリボングラフにほかならないことに気づく. Chern–Simons摂動理論に現れる積分が計量によらないことの証明は, 基本的には, セル分割に対応したグラフの隣接関係を用いてなされる. これらは, 位相的場の理論, 可積分系, Morseホモトピー理論などをまきこむさらに大きな流れを予感させる.

参考文献

本書で展開されている基本的なアイデアは，Witten の論文

[1] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Commun. Math. Phys.* **121** (1989), 351–399.

に負うところが多い．また，幾何学的な視点に重点をおいて，Chern-Simons 理論と共形場理論との関係，および，位相不変量への応用について概説したものとして，

[2] M. F. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press 1990.

がある．場の量子論の基礎概念については，

[3] J. M. Rabin, Introduction to quantum field theory for mathematicians, in *Geometry and Quantum Field Theory, D. S. Freed and K. K. Uhlenbeck, eds.*, American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, 1995, 185–269.

に，数学者に近づきやすい記述がある．また，「理論の概要と展望」で述べた幾何学的量子化については，

[4] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Second Edition, Oxford University Press, 1992.

に詳しい．Feynman 経路積分など，無限次元を対象とする幾何学のエッセンスについて，

[5] 深谷賢治，無限次元の幾何学，岩波講座現代数学の基礎　現代数学の広がり 1，1996.

に解説があるので，是非，一読されることをおすすめする．本書で必要になる，ベクトル束と接続，および特性類の理論については，

[6] 森田茂之，微分形式の幾何学 1, 2，岩波講座現代数学の基礎，1996, 1997.

などを参照されたい．

第 1 章では，ループ群を基礎にして，Wess–Zumino–Witten 模型を扱った．ル

ープ群の中心拡大，ループ群上の複素直線束などが，重要な役割を果たした．これらについては，

[7] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Oxford University Press, 1986.

に詳しく述べられている．また，ループ群の中心拡大の無限小バージョンに対応する概念である，アフィン Lie 環とその表現論については，

[8] V. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Third Edition, Cambridge University Press, 1990.

が標準的である．共形場理論は，Belavin–Polyakov–Zamolodchikov [20]によって，統計力学モデルの臨界現象における無限次元の対称性を扱う理論として，はじめて登場した．さらに，Wess–Zumino–Witten 模型から，KZ 方程式への流れは，Knizhnik–Zamolodchikov [33]において展開された．本書における，Wess–Zumino–Witten 模型の，ループ群上の複素直線束による記述は，おおむね，Gawedzki [28]に従った．Riemann 面上の共形場理論は，論文[45]において，アフィン Lie 環の表現を用いて，モジュライ空間上のベクトル束の理論として定式化された．

第2章では，共形場理論の位相不変量との関係を述べた．2.1 節で扱った組みひも群については，

[9] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 1974.

が標準的な教科書である．この本には，写像類群についても，詳しく述べられている．また，結び目，3 次元多様体について本書で証明をつけずに用いた事実については，

[10] 河内明夫 編著，結び目理論，シュプリンガー・フェアラーク東京，1990.

[11] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc., 1976.

などを参照されたい．本書で扱った，Jones 多項式は，Jones の論文[31]で，岩堀–Hecke 代数の表現の視点から，2 変数の場合までこめて定式化された．

[10]には，Jones 多項式に関する記述もある．2.3 節で解説した，3 次元多様体の Witten 不変量は，[43]によって，量子群の 1 のベキ根における表現論を用いて定義されたものと同等である．本書では，技術的に困難な，量子群の 1 のベキ根における表現のかわりに，共形場理論のフュージョン則による幾何的な展開を試みた．

第3章でふれた Vassiliev の理論については，

[12] V. A. Vassiliev, *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications*, Translations of Mathematical Monographs, American

Mathematical Society, 1994.

に詳しく述べられている．3.2節で解説したKontsevich積分は，論文[36]による．また，その原形となるChenの反復積分の理論については，[22]を見られたい．3.3節のChern–Simons摂動理論による3次元多様体の位相不変量の構成は，Axelrod–Singerの論文[18]によっている．

その他，すでに，本文などで引用されているものも含めて，本書の内容と関係の深い文献をあげておく．

[13] V. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*, University Lecture Series **5**, American Mathematical Society, 1994.

[14] M. F. Atiyah, On framings of 3–manifolds, *Topology*, **29** (1990), 1–8.

[15] M. F. Atiyah and R. Bott, The Yang–Mills equation over Riemann surfaces, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **308** (1982), 523–615.

[16] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral geometry and Riemannian geometry I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **77** (1975), 43–69; ibid. II *ibid.*, **78** (1975), 405–432; ibid. III *ibid.*, **79** (1976), 71–99.

[17] S. Axelrod, S. Della Pietra and E. Witten, Geometric quantization of Chern–Simons gauge theory, *J. Diff. Geom.*, **33** (1991), 782–902.

[18] S. Axelrod and I. M. Singer, Chern–Simons perturbation theory, in *Proc. XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, S. Catto and A. Rocha eds.*, World Scientific, 1991, 3–45; ibid II *J. Diff. Geom.*, **39** (1994), 173–213.

[19] A. Beauville and Y. Laszlo, Conformal blocks and generalized theta functions, *Commun. Math. Phys.*, **164** (1994), 385–419.

[20] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.*, **B241** (1984), 333–380.

[21] R. Bott and C. Taubes, On the self–linking of knots, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 5247–5287.

[22] K. T. Chen, Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 831–879.

[23] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley*, (1989), 798–820.

[24] V. G. Drinfel'd, Quasi–Hopf algebras, *Leningrad Math. J.*, **1** (1990), 1419–57.

[25] D. Evans and Y. Kawahigashi, *Quantum Symmetries on Operator Algebras*, Oxford University Press, 1998.

[26] R. Fenn and C. Rourke, On Kirby's calculus of links, *Topology*, **18** (1979), 1–15.

[27] K. Fukaya, Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory, *Commun. Math. Phys.*, **181** (1996), 37–90.

[28] K. Gawedzki, Wess–Zumino–Witten conformal field theory, in *Constructive Quantum Field Theory II, G. Velo and A. S. Wightman eds.*, Plenum Press, 1990, 89–120.

[29] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, Wilson lines in Chern–Simons theory and link invariants, *Nucl. Phys.*, **B330** (1990), 575–607.

[30] M. Jimbo, A q–difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.*, **10** (1985), 63–69.

[31] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. Math.*, **126** (1987), 335–388.

[32] R. Kirby and P. Melvin, The 3–manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbf{C})$, *Invent. Math.*, **105** (1991), 473–546.

[33] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current algebra and Wess–Zumino models in two dimensions, *Nucl. Phys.*, **B247** (1984), 83–103.

[34] T. Kohno, Monodromy representations of braid groups and Yang–Baxter equations, *Ann. Inst. Fourier*, **37** (1987), 139–160.

[35] T. Kohno, Topological invariants for 3–manifolds using representations of mapping class groups I, *Topology*, **31** (1992), 203–230.

[36] M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, *Advances in Soviet Mathematics*, **16** (1993), 137–150.

[37] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Commun. Math. Phys.*, **147** (1992), 1–23.

[38] T. Q. T. Le and J. Murakami, On Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations of mixed Euler numbers, *Topology Appl.*, **62** (1995), 193–206.

[39] T. Q. T. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, On a universal perturbative invariant of 3–manifolds, *Topology*, **37** (1998), 539–574.

[40] 村瀬元彦，積分可能系の展開，岩波講座現代数学の基礎　現代数学の広がり 2，1997.

[41] H. Murakami, Quantum $SO(3)$-invariants dominate the $SU(2)$–invariant of Casson and Walker, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **117** (1995), 237–249.

[42] T. Ohtsuki, A polynomial invariant of rational homology 3–spheres, *Invent. Math.*, **123** (1996), 241–257.

[43] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invariants of 3–manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.*, **103** (1991), 547-597.

[44] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on $\mathbf{P}^1$ and monodromy representations of braid groups, *Advanced Studies in Pure Math.*, **16** (1988), 297–372.

[45] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, *Advanced Studies in Pure Math.*, **19** (1990), 459–566.

[46] E. Witten, Two–dimensional gravity and intersection theory on moduli space, *Surveys in Differentaial Geometry*, **1** (1991), 243–310.

[47] T. Yoshida, An abelianization of $SU(2)$ WZW model, *Ann. Math.*, **164** (2006), 1–49.

欧文索引

和文索引

ア 行

カ 行

サ 行

河野俊丈

1955年生まれ
1979年東京大学理学部数学科卒業
現在　東京大学大学院数理科学研究科教授
専攻　位相幾何学

場の理論とトポロジー

2008年6月5日　第1刷発行
2009年6月5日　第2刷発行

著　者　河野俊丈（こうのとしたけ）

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・大日本印刷　カバー印刷・NPC　製本・松岳社

ISBN 978-4-00-005835-3　Printed in Japan